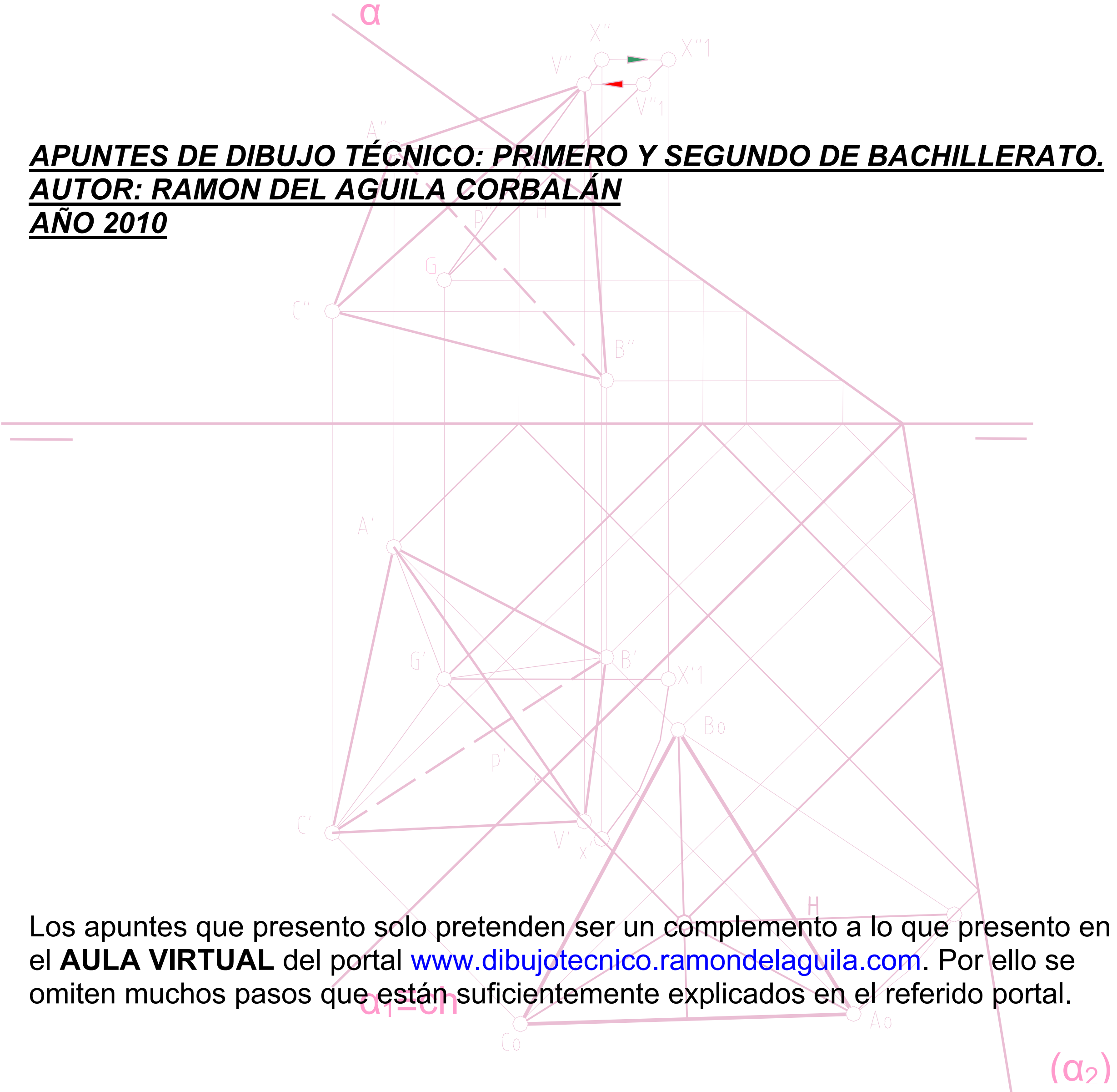
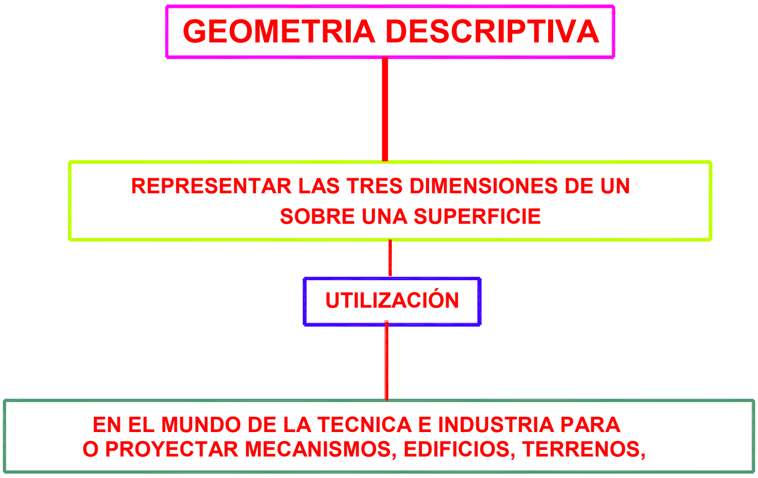


APUNTES DE DIBUJO TÉCNICO: PRIMERO Y SEGUNDO DE BACHILLERATO.
AUTOR: RAMON DEL AGUILA CORBALÁN
AÑO 2010

Los apuntes que presento solo pretenden ser un complemento a lo que presento en el **AULA VIRTUAL** del portal www.dibujotecnico.ramondelaguila.com. Por ello se omiten muchos pasos que están suficientemente explicados en el referido portal.

1. GENERALIDADES Y FUNDAMENTO DEL SISTEMA. ALFABETO DEL PUNTO.

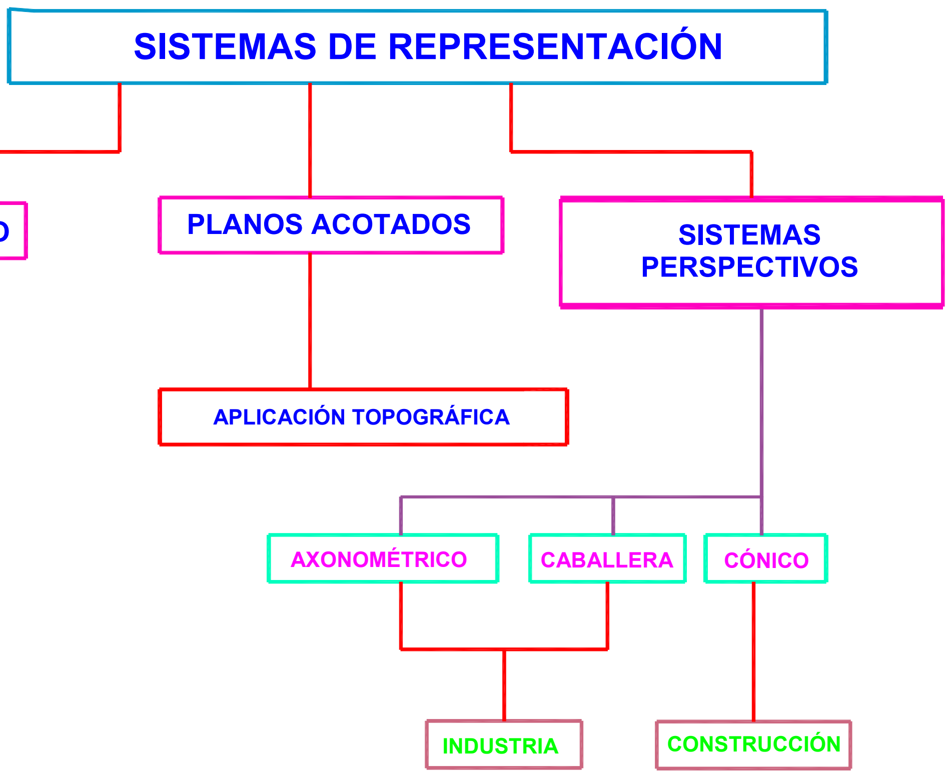
En el sistema diédrico o de Monge, se debe al matemático y físico francés Gaspar Monge. Este científico es considerado como el *Padre del a Geometría Descriptiva.* Nació en Beauné en 1746, y murió en Paris en 1818.



La geometría descriptiva tiene como fundamento la representación de un objeto de tres dimensiones sobre soportes que solo tienen dos, es decir superficies planas.

Esta forma de expresión se utilizada en el mundo de la técnica, industria, arquitectura, topografía, etc.

Los distintos sistemas de representación se describen en el cuadro siguiente.



1.1. CONVENCIONALISMOS UTILIZADOS.

En el sistema diédrico intervienen dos planos, el plano horizontal y vertical. Figura 1. Estos dividen al espacio en cuatro regiones, llamadas octantes o diedros. Se numeran en sentido contrario a las agujas del reloj.

La recta intersección de ambos planos, determinan la línea de tierra. Se representa por dos trazos más gruesos en sus extremos.

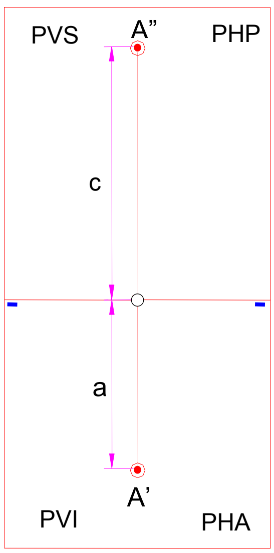
El plano horizontal lo dividiéremos en dos partes, **horizontal anterior** ***(PHA)***, si se encuentra a la derecha de l línea de tierra, y **horizontal posterior** ***(PHP),*** si se encuentra a la izquierda.

De igual forma el vertical se divide en **vertical superior** ***(PVS)***, si se encuentra por encima de la línea de tierra, y **vertical inferior** ***(PVI),*** si se encuentra por debajo del a misma,

Los planos se abaten de forma que el plano vertical superior y el horizontal posterior sean coincidentes, al igual que el plano horizontal anterior y el vertical inferior

Al abatir los planos se abaten los puntos contenidos en los mismos, de tal forma que la proyección vertical de punto ***A***” queda por encima de la línea de tierra, y la horizontal ***A’*** por debajo de ella.

Los puntos se representarán por letras mayúsculas. Empleando para la proyección horizontal la misma letra acompañada de un comilla (p. e. ***A’),*** y para la proyección horizontal y dos comillas ***A”,*** para la vertical. Figura 1.



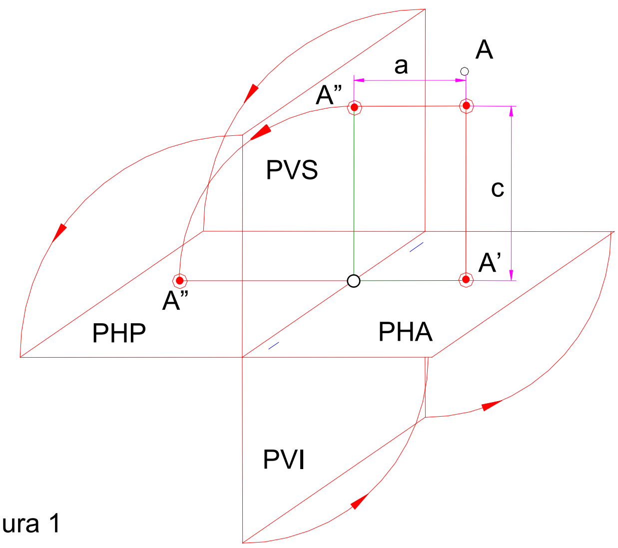


Figura 1

Se llama cota, a la distancia del punto al plano horizontal. El alejamiento será la distancia del punto al vertical.

Los puntos que están situados por encima del plano horizontal, **su cota es positiva**. Si se encuentra por debajo será **negativa**.

Los puntos a la derecha del plano vertical, el **alejamiento es positivo**. A la izquierda **negativo**. Figura 1.

El perfil ***X*** será un punto de referencia para situar el punto ***O***. A la derecha será positivo y a la izquierda negativo

Planos bisectores serán aquellos que dividen al espacio en ocho regiones llamadas **octantes**. Estos se numeran del 1 al 8, en sentido contrario a las agujas del reloj. Figura 2.

.

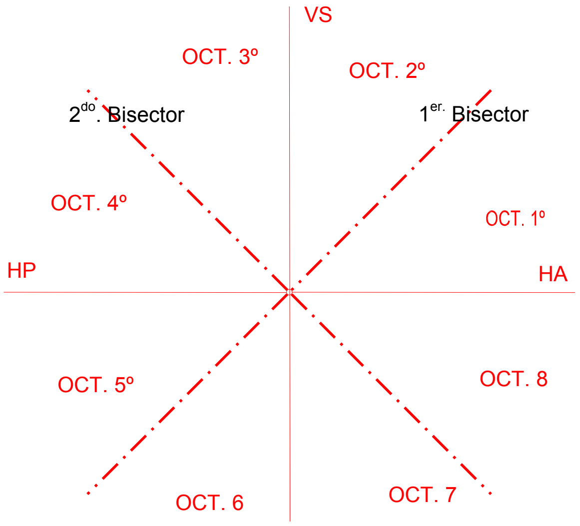


Figura 2

1.2. PUNTOS SITUADO EN LOS CUADRANTES. Figura 3 y 4.

Punto ***A***, situado en el primer cuadrante primer octante. Cota positiva. Alejamiento positivo. L acota será menor que el alejamiento.

Punto ***B*** situado en el plano bisector. Cota igual al alejamiento, ambos positivos

Punto ***C*** situado en el primer cuadrante segundo octante. Cota y alejamiento positivos. L acota será mayor que el alejamiento.

Como puede observarse al abatir los planos, la proyección segunda de los puntos queda por encima de la línea de tierra y la primera por debajo. En consecuencia los puntos situados en el primer cuadrante su cota siempre estará por encima de la línea de tierra y el alejamiento por debajo, y ambos serán positivos.

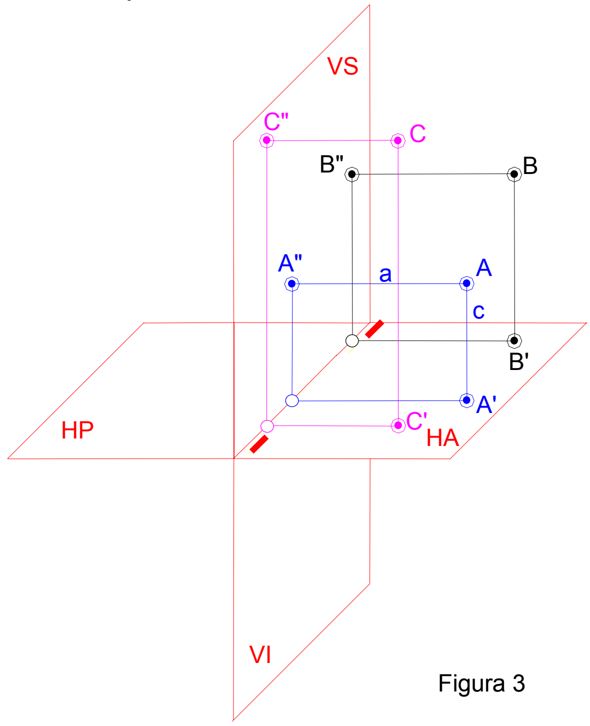
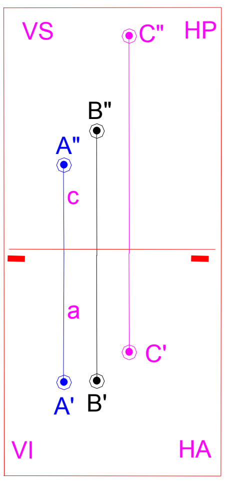


Figura 3



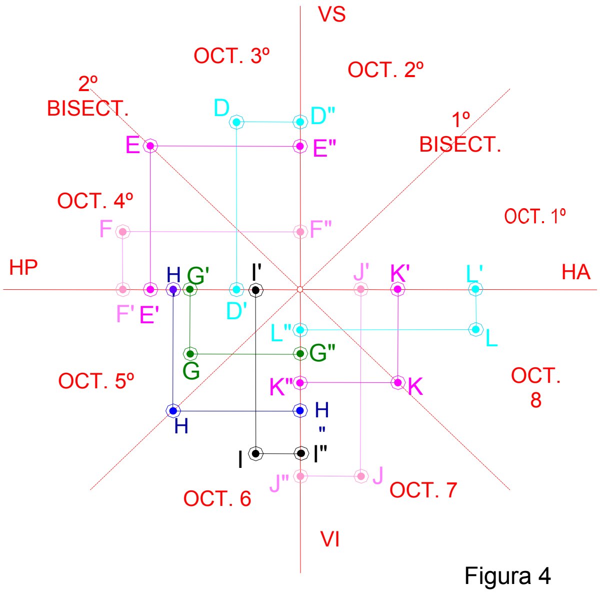


Figura 4

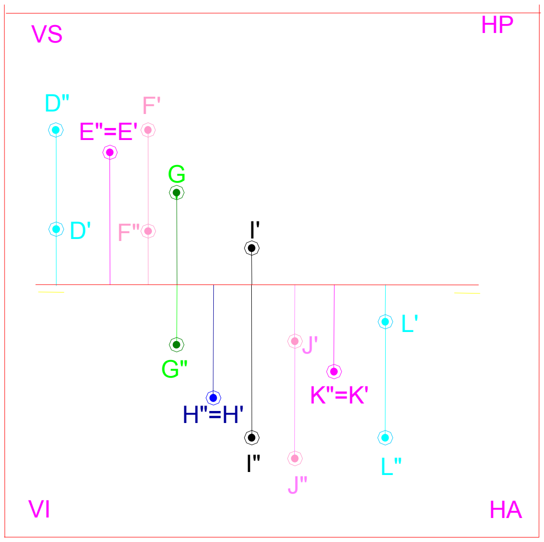
Punto ***D*** situado en el segundo cuadrante tercer octante. Cota positiva. Alejamiento negativo. Ambas proyecciones por encima de la línea de tierra.

Punto ***E*** situado en el segundo bisector. Cota igual al alejamiento.

Punto ***F,*** situado en el segundo cuadrante cuarto octante. Alejamiento negativo y cota positiva, esta menor.

Los puntos ***G, H, I,*** situados en el tercer cuadrante son inversos a los del primero.

Los puntos ***J, K, L,*** situados en el cuarto cuadrante, son inversos a los del segundo.



1.3. PUNTOS SITUADOS EN LOS PLANOS DE PROYECCIÓN.

Punto ***M***, situado en el plano horizontal anterior. La proyección horizontal coincide con el punto. La vertical está en la línea de tierra. **Cota = 0 y alejamiento +.**

Punto ***N***, situado en el plano vertical. **Alejamiento = O y cota +**

Punto ***P*** situado en el plano horizontal posterior. **Cota = 0 y alejamiento negativo.**

Punto ***Q***, situado en el plano vertical inferior. **Alejamiento = O y cota negativa**

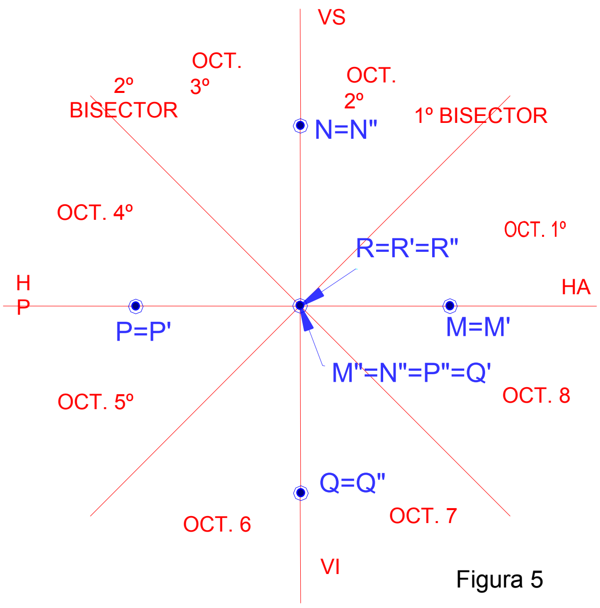
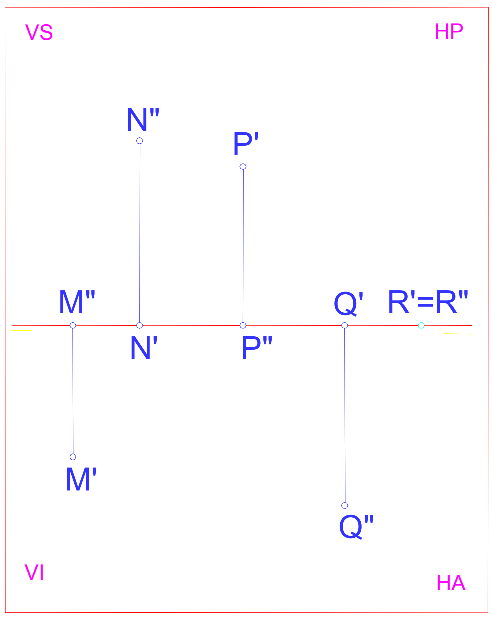


Figura 5



Punto ***R***, situado en la línea de tierra. Todas sus proyecciones se encontraran en ella. No tiene ni cota ni alejamiento.

1.4. SITUACIÓN DE PUNTOS POR MEDIO DE COORDENADAS. Fig. 6.

Para situar los puntos por sus coordenadas, se adopta el siguiente convenio:

X (perfil), Y (cota), Z (alejamiento)

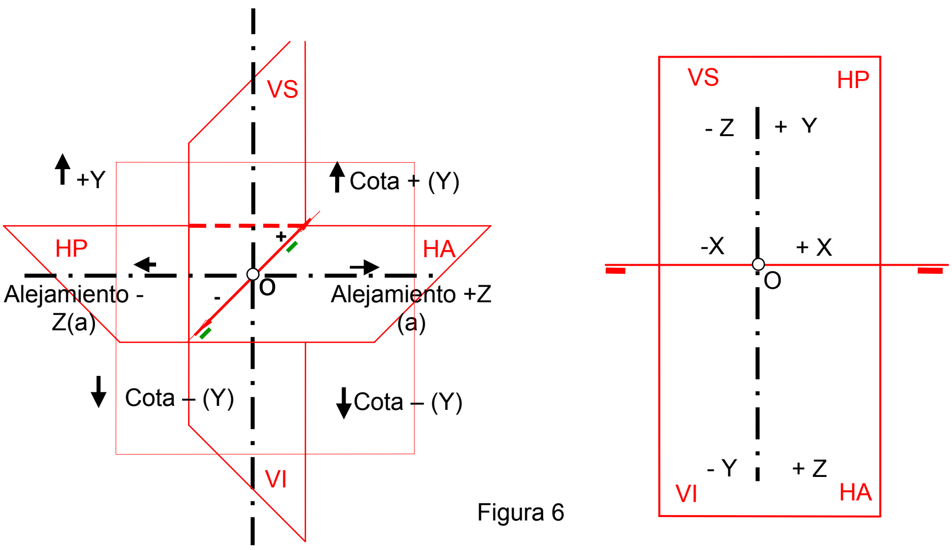


Figura 6

Ejercicio:

De acuerdo con el convenio establecido anteriormente. Situar los siguientes puntos en el sistema diédrico: A (-25, 20, 0), B(-15, 15, 5), C(-5, -10, 10), D (5, -5, -15), E(15, -20, 0) y F(25, 15, -5). Origen en el centro de la línea de tierra. Figura 7.

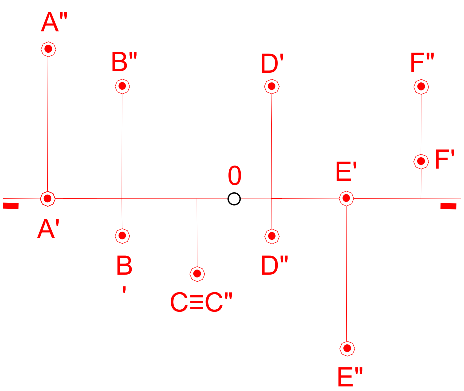


Figura 7

2. LA RECTA

Una recta queda definida por dos puntos. Por tanto para su representación bastará con determinar sus proyecciones, y unir las correspondientes proyecciones homónimas de sus puntos.

Un punto pertenece a una recta si sus proyecciones homónimas se corresponden con la recta.

2.1. NOMENCLATURA DE LA RECTA.

Para su denominación utilizaremos letras minúsculas acompañadas de una o dos comillas, según sea la proyección horizontal o vertical. (Por ejemplo ***r’, r”***). Los puntos que definen las rectas se designaran por letras mayúsculas.

Una recta queda definida por sus trazas. Existen dos trazas una horizontal y otra vertical.

Se denomina traza al punto de intersección de la recta con los planos de proyección.

Traza horizontal se representa por ***H***, su proyección será por tanto ***H’*** acompañada de la letra minúscula correspondiente a la recta. Por ejemplo ***H’r***.

Traza vertical se representa por ***V***, su proyección vertical será por tanto ***V”*** acompañada de la letra minúscula correspondiente a la recta. Por ejemplo ***V”r.***

Como ***H*** y ***V*** siempre serán coincidentes con sus respectivas proyecciones ***H’*** y ***V”,*** en lo sucesivo solo emplearemos su proyecciones.

2.2. PROYECCIÓN DE UNA RECTA OBLICUA DADA POR DOS PUNTOS DE ELLA.

Se la recta ***r***, dada por los puntos ***A*** y ***B***. Figura 8.
Hallamos las proyecciones horizontal de los puntos ***A’*** y ***B’***. Seguidamente hallamos la vertical, ***A”*** y ***B”***. la unión de ambas nos determinará las proyecciones ***r’*** y ***r”*** del a recta ***r***.

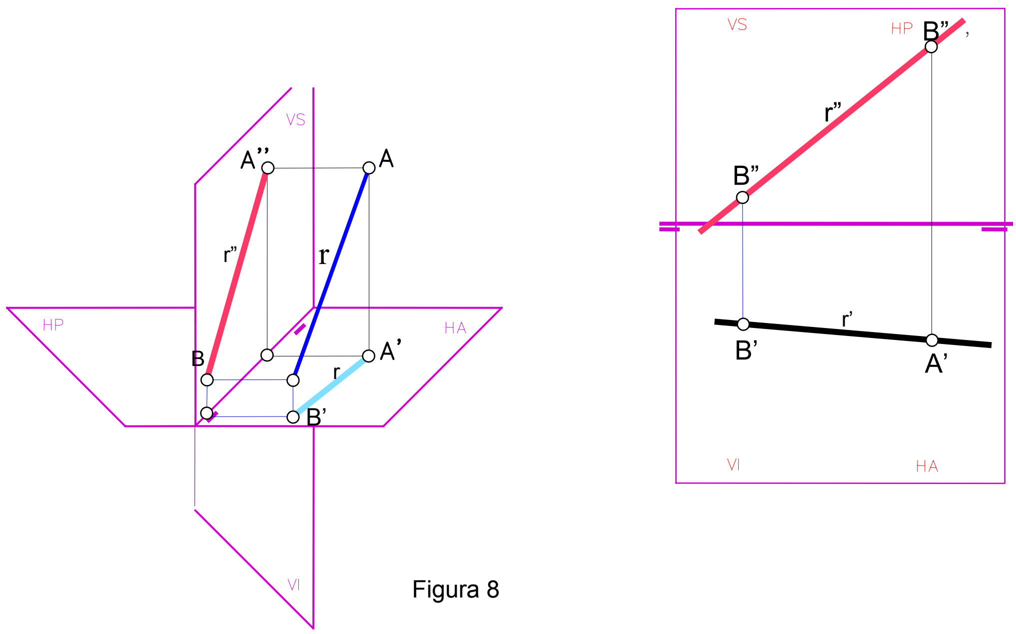


Figura 8

2.3. PROYECCIÓN DE UNA RECTA OBLICUA MEDIANTE SUS TRAZAS.

Sea la recta ***r*** que corta a los planos de proyección en los puntos ***H ≡ H'r*** y ***V≡ V''r,*** trazas de la misma. Al ser las trazas de la recta puntos de la misma, bastará con unir sus proyecciones homónimas para obtener las proyecciones ***r'-r''***. El resultado será el mismo que si hubiéramos proyectado los puntos ***G*** y ***E***, pertenecientes a la recta. Figura 9.

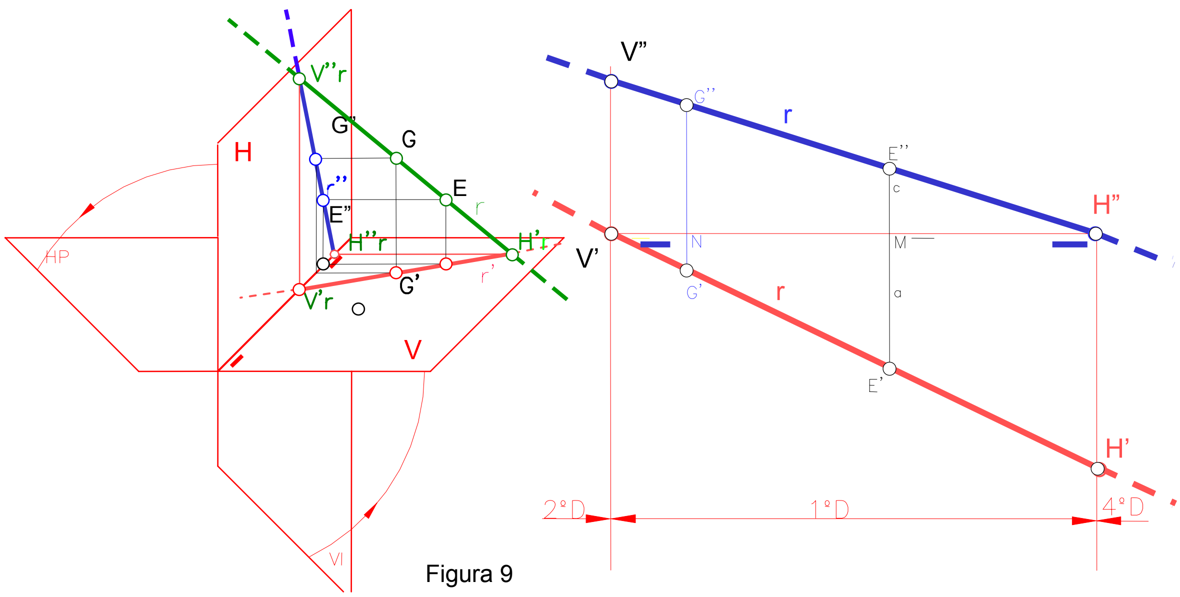


Figura 9

2.4. RECTA PARALELA AL PLANO VERTICAL, PRIMER CUADRANTE RECTA FRONTAL.

Tendrá una sola traza la horizontal ***H ≡ H'***, y su proyección horizontal será paralela a la línea de tierra. La vertical formará un determinado ángulo con el plano horizontal. Figura 10.

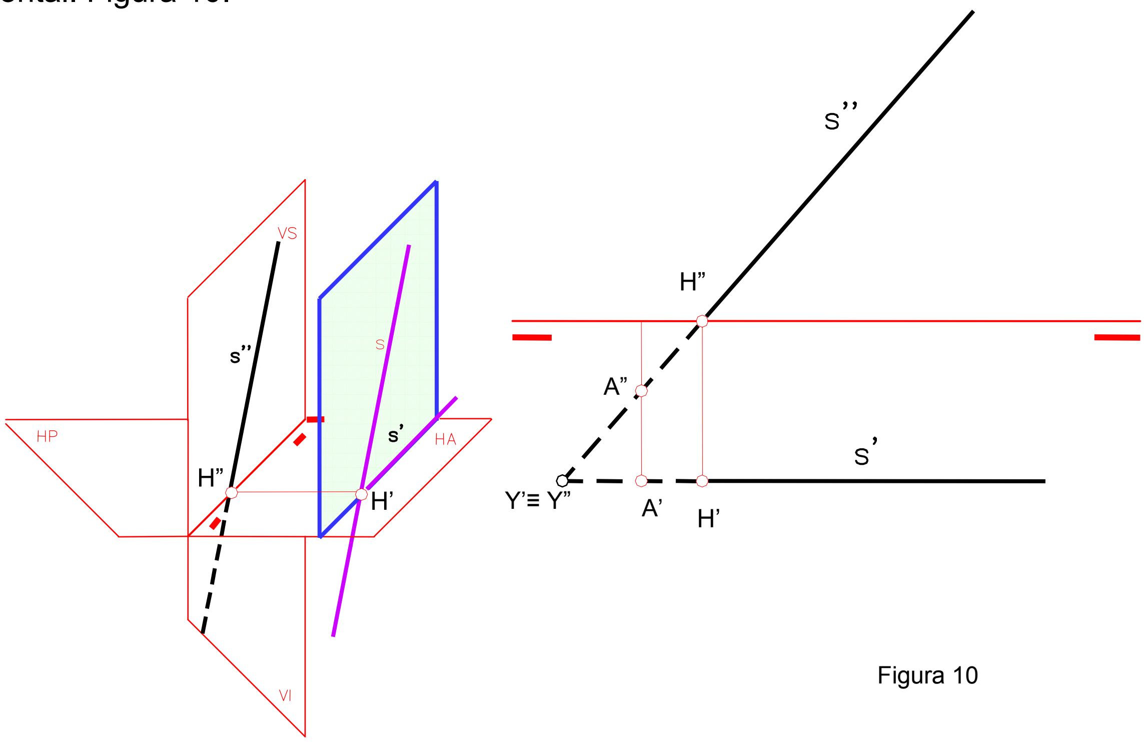


Figura 10

Para hallar los puntos de intersección de la recta con los bisectores, bastará con buscar en la recta un punto cuya cota sea igual al alejamiento si se encuentra en el primer o tercer bisector, o bien que ambas sean coincidentes si se encuentran en el segundo y cuarto.

La recta será visible si se encuentra en el primer bisector, en caso contrario será oculta y se representará por líneas de trazos.

Los referidos puntos se representarán por ***x*** o ***y*** primero y segundo bisector respectivamente.

2.5. PROYECCIÓN DE UNA RECTA PARALELA AL PLANO HORIZONTAL O RECTA HORIZONTAL.

Estará contenida en un plano paralelo al horizontal. Cortará únicamente al plano vertical. Tendrá la traza vertical paralela a la línea de tierra. El punto de corte de la recta con el segundo bisector tendrá la misma cota que alejamiento. Figura 11 a y b.

Para hallar el punto de corte con el primer bisector trazaremos una recta auxiliar ***m***, que formará el mismo ángulo con la línea de tierra que ***r'***. El punto ***X'-X"*** será el punto de corte con el primer bisector. Figura 11 b.

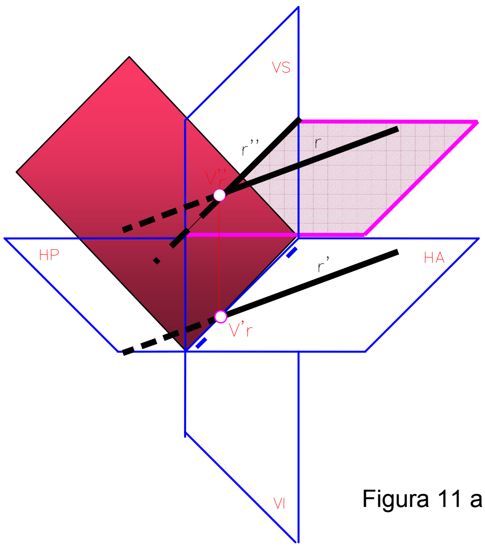


Figura 11 a

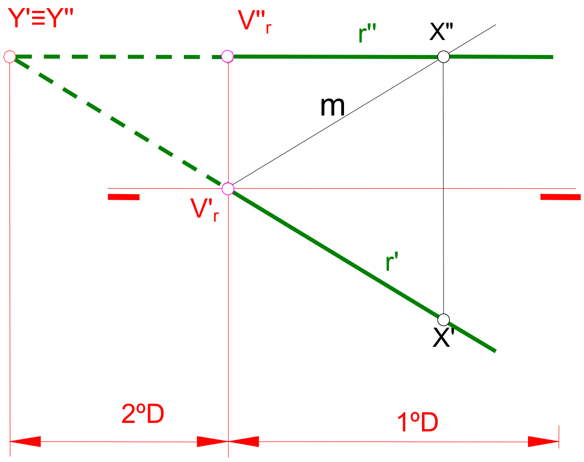


Figura 11 b

2.6. RECTA PARALELA AL PLANO VERTICAL SEGUNDO CUADRANTE.

Será igual que la anterior, pero no será visible. El punto de intersección con el bisector estará por encima de la línea de tierra. Figura 12.

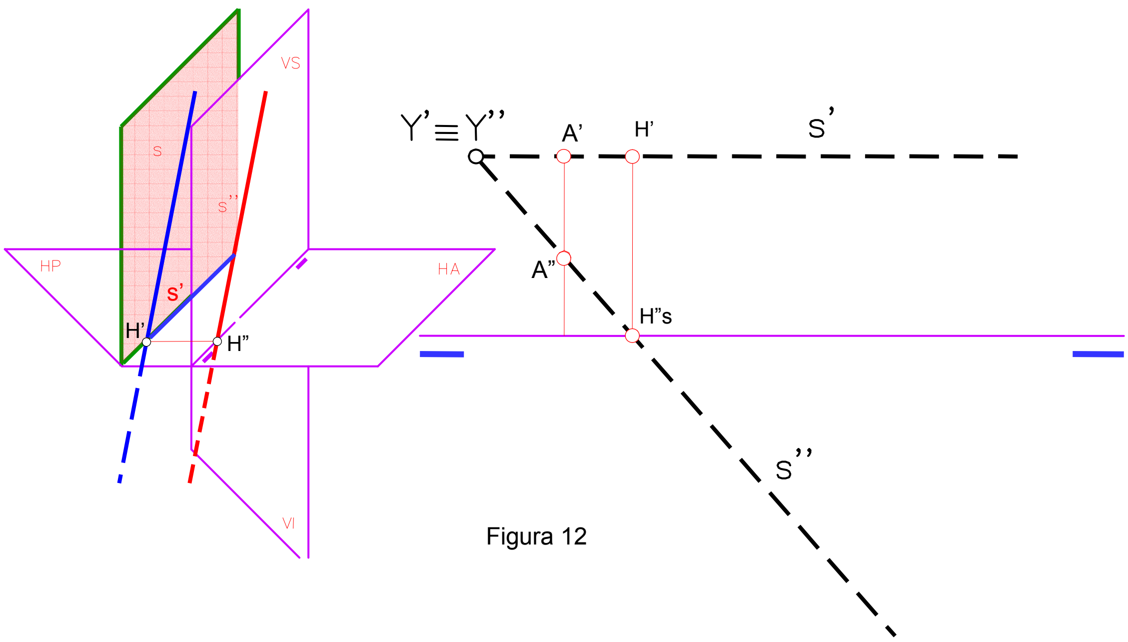


Figura 12

2.7. RECTA PERPENDICULAR AL PLANO VERTICAL. RECTA DE PUNTA (s).

La proyección vertical será un punto, ***s”*** que será coincidente con la traza vertical ***V”s***. La horizontal será una recta perpendicular a la línea de tierra.

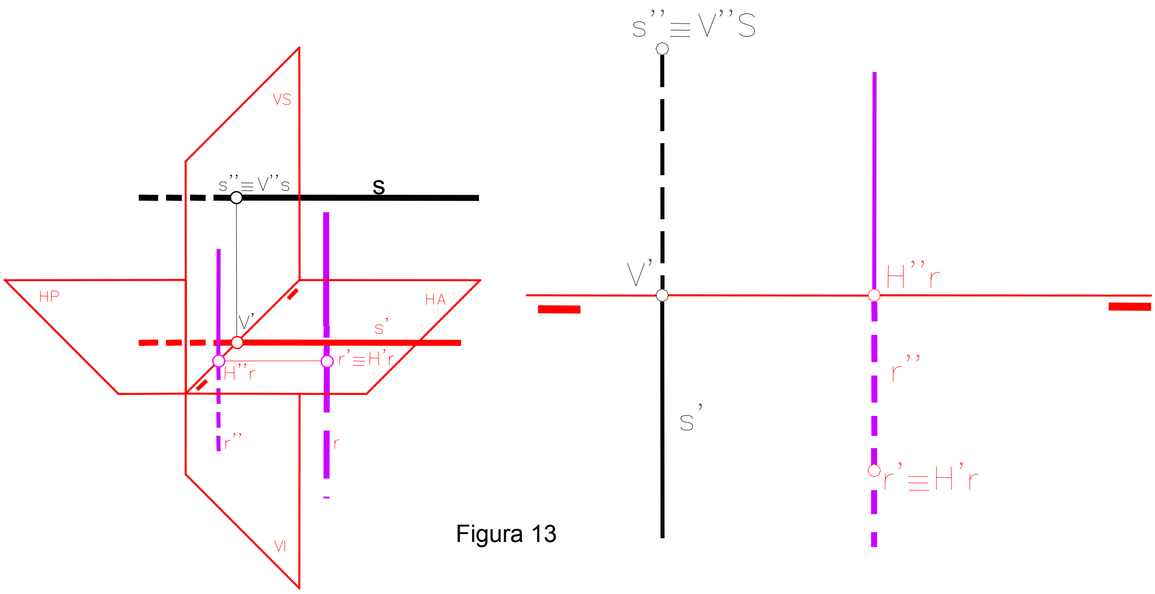


Figura 13

2.8. RECTA PERPENDICULAR AL PLANO HORIZONTAL, RECTA VERTICAL (r).

Será contraria a la anterior.

2.9. RECTAS PARALELAS A LA LÍNEA DE TIERRA.

No cortará los planos de proyección y por tanto no tendrá trazas.

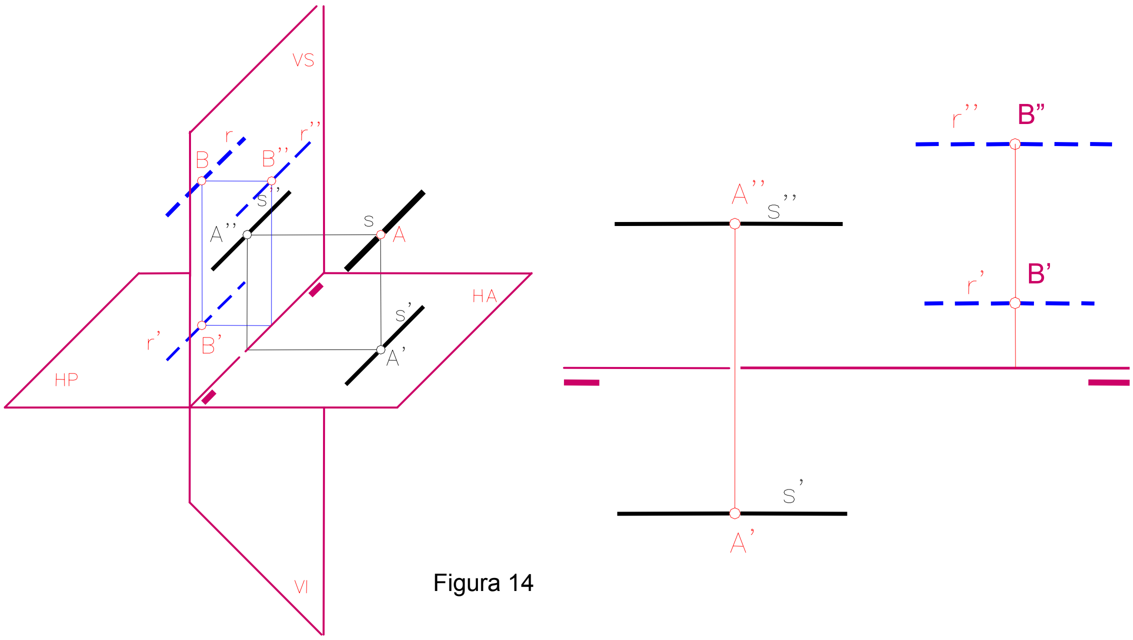


Figura 14

Para su representación tendremos que dibujar un punto cualquiera de la recta. Punto ***A*** de la recta ***s*** y ***B*** de la recta ***r***.

2.10. RECTA – r – CONTENIDA EN EL PRIMER BISECTOR.

Todas sus trazas estarán en la línea de tierra y formará 45º con los planos de proyección. Figura 15.

2.11. RECTA – s – PARALELA AL PRIMER BISECTOR.

Estará contenida en un plano paralelo al bisector, su traza horizontal será paralela al bisector. Figura 15.

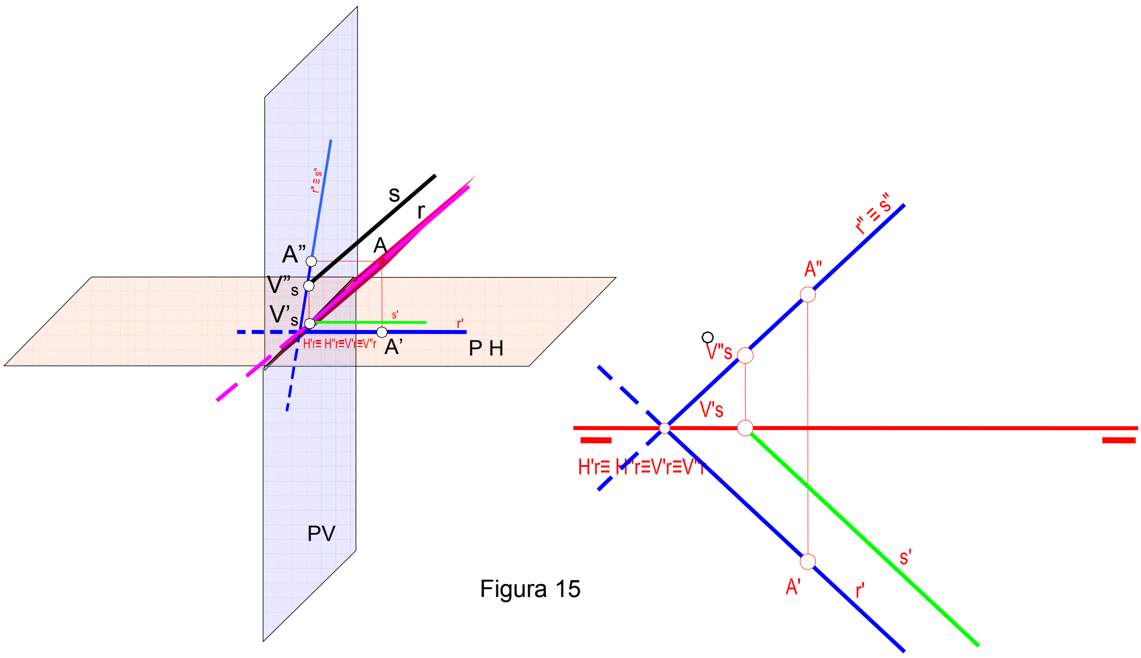


Figura 15

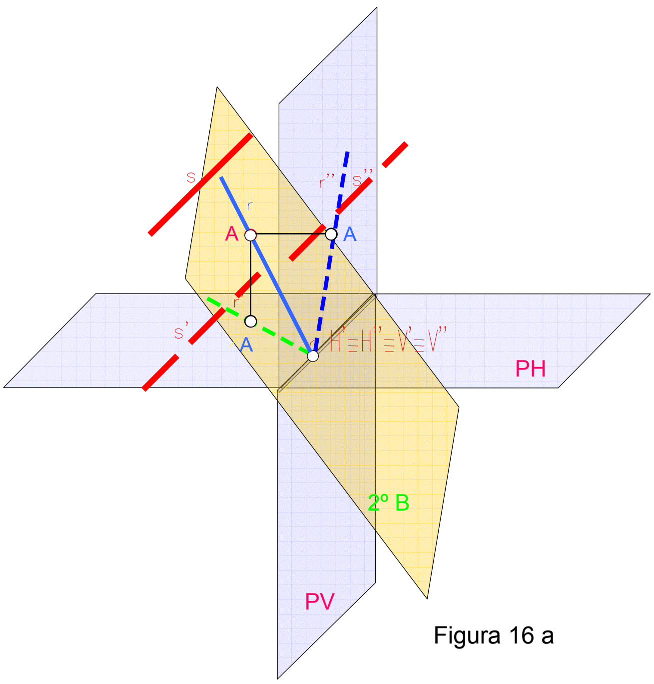


Figura 16 a

2.12. RECTAS CONTENIDAS EN EL SEGUNDO BISECTOR.

Formará 45º con los planos de proyección, ***r’- r”*** serán coincidentes. Ambas serán ocultas. Figura 16 a y b.

2.13. RECTA – s – PARALELA A LA LÍNEA DE TIERRA.

Sus proyecciones serán coincidentes. No tiene ninguna traza. Será preciso fijar un punto cualquiera de la recta. Figura 16 a y b.

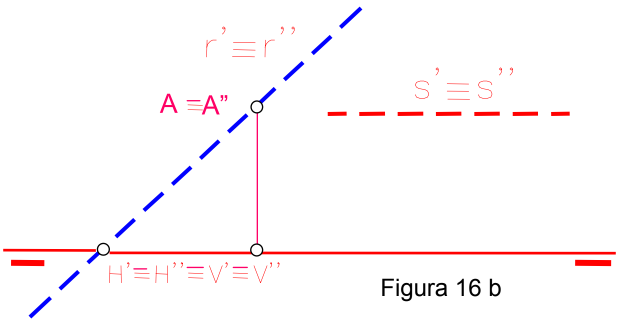


Figura 16 b

2.14. RECTA PERPENDICULAR A LA LÍNEA DE TIERRA, CORTÁNDOSE CON ELLA.

Es un caso particular de las rectas de perfil, todas las trazas se encontrarán en la línea de tierra. Para que quede definida será preciso situar un punto cualquiera de ella. Punto ***A***. Figura 18.

Estas rectas estarán contenidas en un plano perpendicular a la línea de tierra. Sus proyecciones son coincidentes en un mismo punto de la línea de tierra.

Si la recta estuviera contenida en un plano bisector, recta ***p (p’-p”),*** sus proyecciones serian las mismas, con la salvedad que cualquier punto de la recta p.e ***J***, tendría la misma cota que alejamiento.

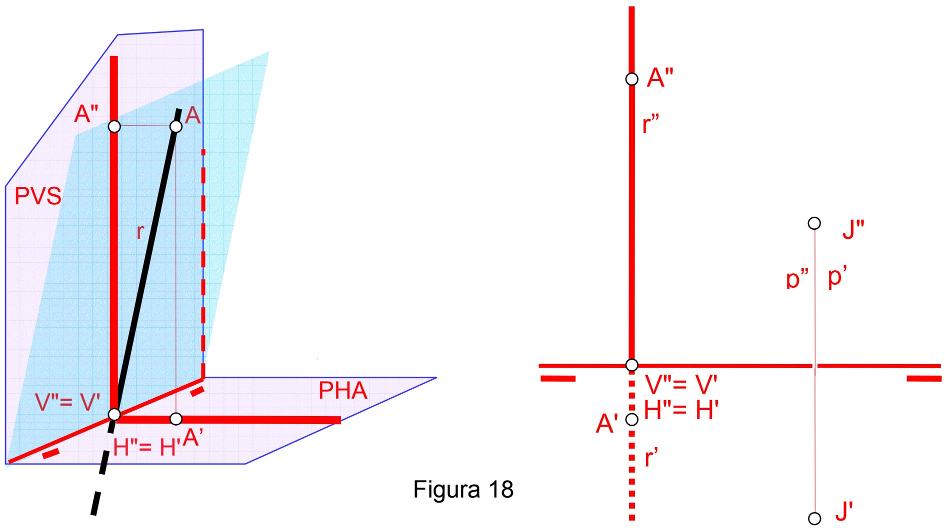
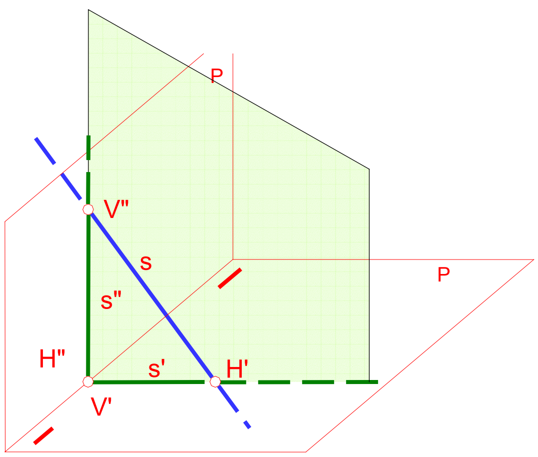


Figura 18

2.15. RECTA PERPENDICULAR A LA LÍNEA DE TIERRA, CRUZÁNDOSE CON ELLA. RECTAS DE PERFIL.

La recta ***s,*** estará contenida en un plano ***α***, perpendicular a los planos de proyección. Sus trazas estarán en una línea perpendicular a la línea de tierra y sus proyecciones ***V’- H***”, serán coincidentes. Figura 19.



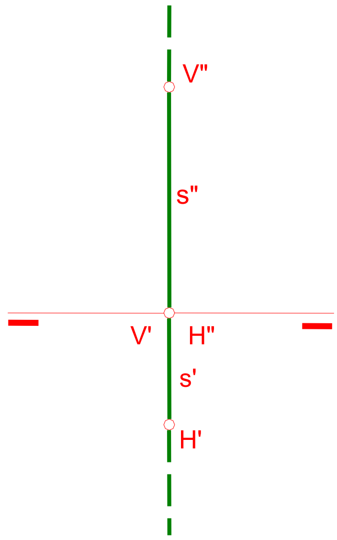


Figura 19

2.15.1. TERCERA PROYECCIÓN DE UNA RECTA DE PERFIL.

Para definir una recta de perfil será preciso representar la tercera proyección de la misma. Figura 20.

Tazamos un plano de perfil ***PP***. Giramos la traza horizontal ***H'_r***, hasta que ocupe la posición ***(H'_r)***, que uniéndola con ***V''_r***, tendremos la tercera proyección de la recta ***r’’’***.

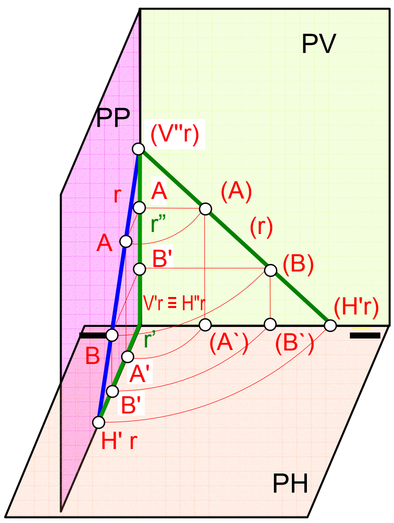
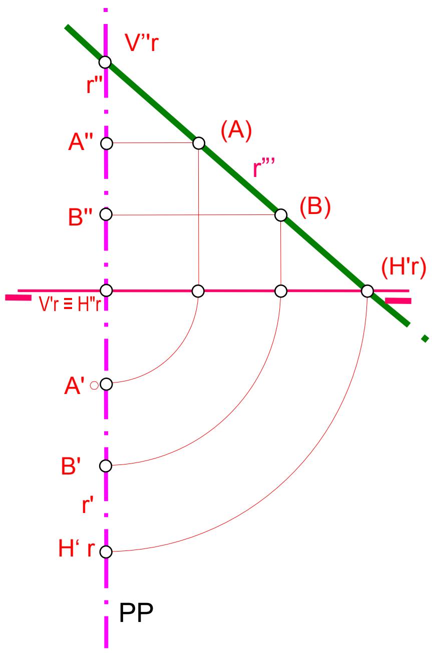


Figura 20



2.16. HALLAR LA TERCERA PROYECCIÓN DE UNA RECTA QUE PASA POR LA LÍNEA DE TIERRA.

Sea la recta ***r (r', r")*** dada por los puntos ***A (A", A') y B (B', B")***
Sus trazas y proyecciones están confundidas en una misma recta perpendicular a la línea de tierra. Figura 21.

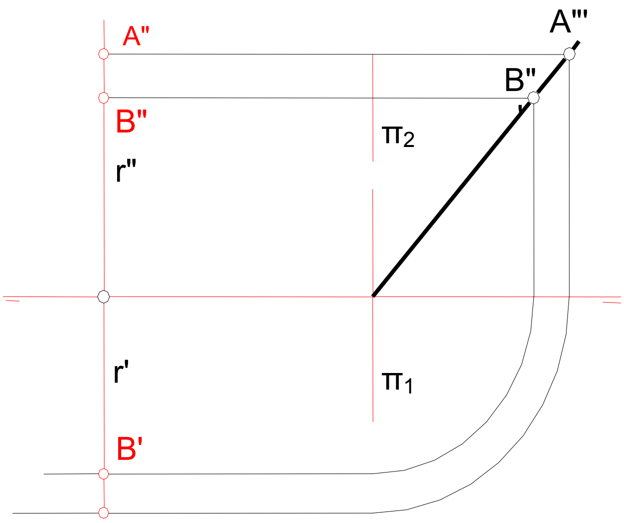


Figura 21

1. Elegimos un plano cualquiera de perfil ***π.***
2. Llevamos la recta a tercera proyección, obteniendo la recta **r".**

3. ALFABETO DEL PLANO

Un plano queda definido por:

a) Dos rectas que se cortan, o paralelas,
b) Tres puntos no alineados
c) Una recta y un punto.
d) Los casos anteriores se reducen a dos rectas incidentes.

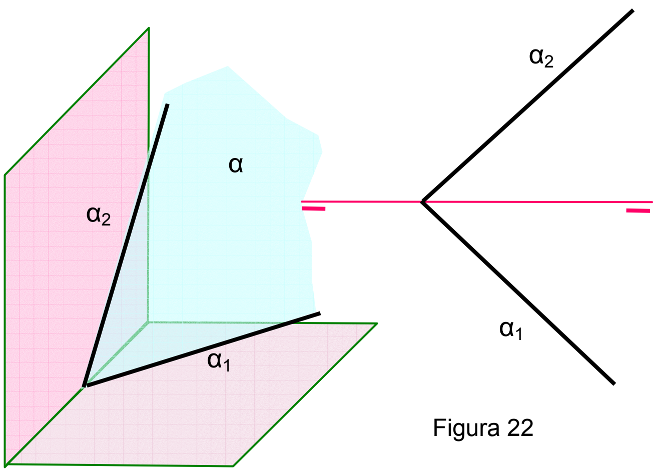


Figura 22

Un plano se representa por sus trazas.

Se llama trazas de un plano a la intersección de este con los planos de proyección.

Para su representación emplearemos letras griegas.

En la figura 21, se ha representado un plano oblicuo a los de proyección. A la traza vertical la hemos designado por ***α_2*** y horizontal por del ***α_1***.

3.1. PLANO DE CANTO *β*, O PERPENDICULAR AL VERTICAL. PROYECTANTE VERTICAL.

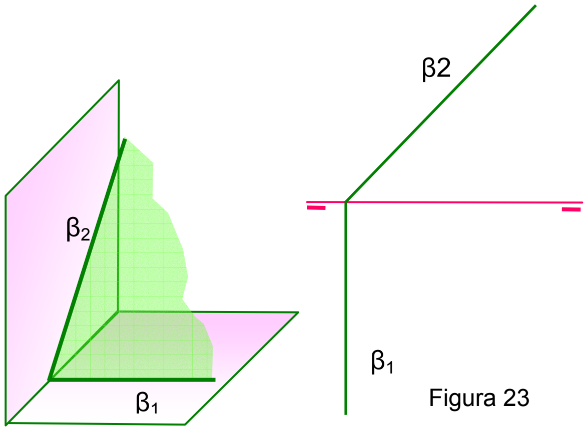


Figura 23

La traza horizontal ***β_1*** será perpendicular a la línea de tierra, y la vertical ***β_2*** formará un ángulo con ella. Figura 23.

3.2. PLANO HORIZONTAL *β*, O PARALELO AL HORIZONTAL DE PROYECCIÓN PRIMER CUADRANTE.

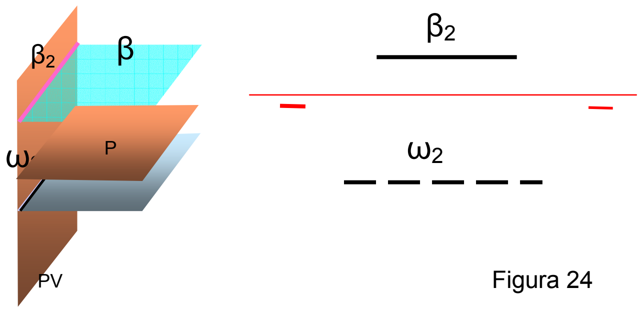


Figura 24

Tendrá una sola traza, la vertical ***β_2***, que será paralela a la línea de tierra, y estará por encima de ella.

.

Si el plano se encuentra en el cuarto cuadrante la traza será oculta ***ω_2***. Figura 24.

3.3. PLANO FRONTAL *β* PARALELO AL VERTICAL. Figura 25 a y b.

Tendrá una sola traza que estará por debajo de la línea de tierra, y será paralela a la misma ***β_1***.

Si el plano se encuentra en el segundo cuadrante ***μ_1***, será oculto y estará por encima de la línea de tierra.

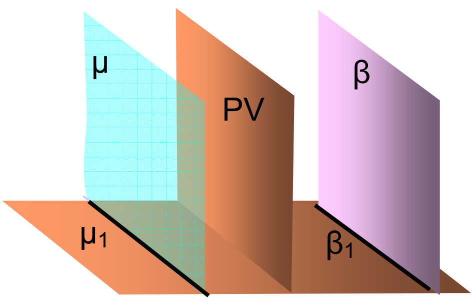


Figura 25 b

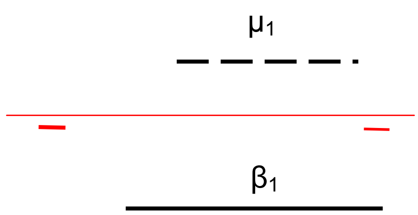


Figura 25a

3.4. PLANO DE PERFIL *δ* O PERPENDICULAR A LA LÍNEA DE TIERRA.

Sus trazas ***δ₁-δ₂*** estarán en una misma perpendicular a la línea de tierra. Figura 26.

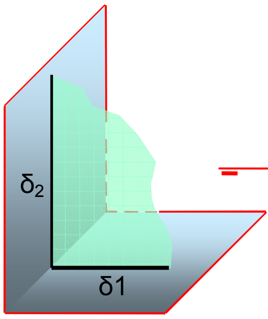
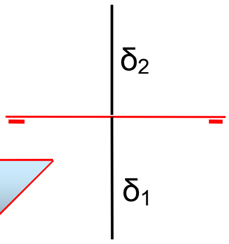


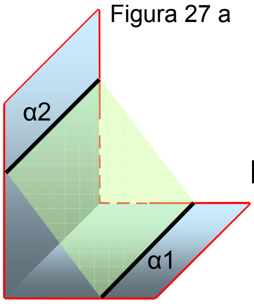
Figura 26



3.5. PLANO *α* PARALELO A LA LÍNEA DE TIERRA.

Sus trazas ***α₁-α₂*** serán paralelas a la línea de tierra. Figura 27a y b.

Figura 27 a



la

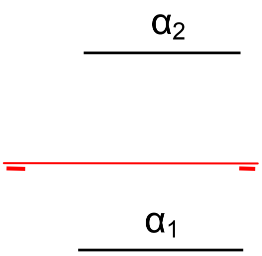


Figura 27 b

3.6. PLANO *α* QUE PASA POR LA LÍNEA DE TIERRA

Las trazas estarán confundidas con línea de tierra. Para su definición será preciso representar un punto cualquiera del plano. Por ejemplo el punto ***A(A'-A").*** Figura 28 a y b.

El plano ***α₁-α₂*** se representará por las proyecciones del punto y dos pequeños trazos a cada lado de la recta que une los puntos.

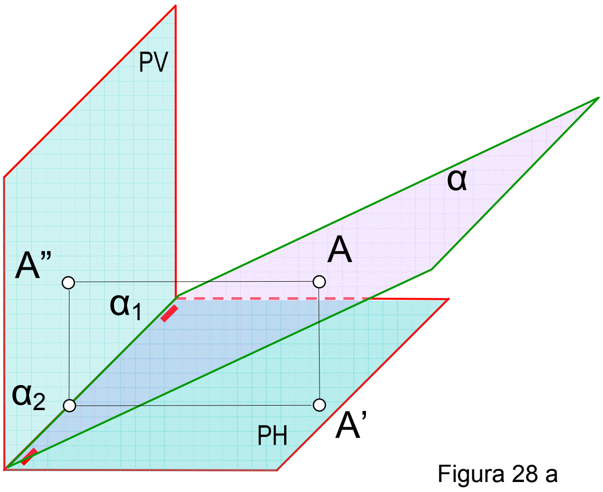


Figura 28 a

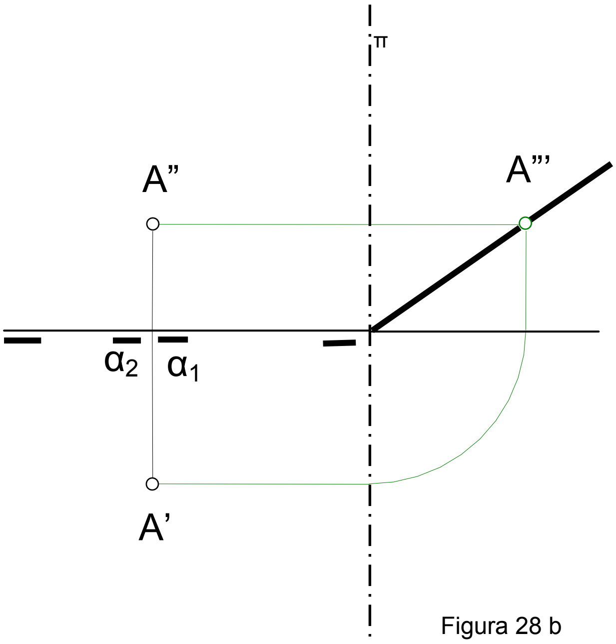


Figura 28 b

3.7. DETERMINAR LAS TRAZAS DE UN PLANO DADO TRES PUNTOS DEL MISMO.

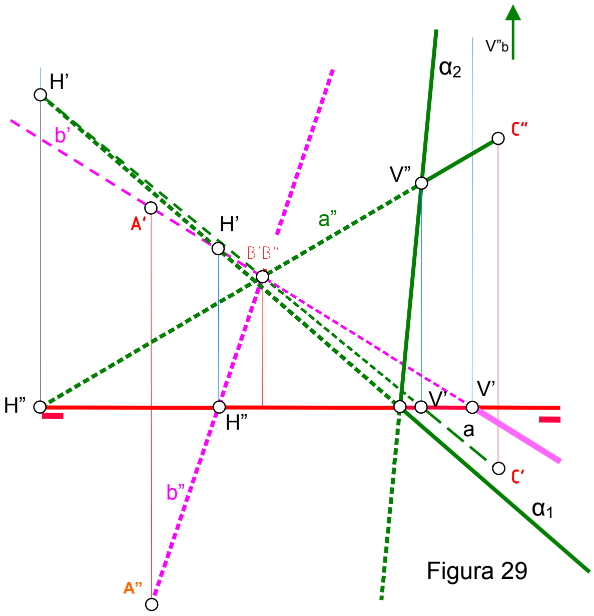


Figura 29

Sean los puntos ***A, B*** y ***C*** dados por sus proyecciones

1. Utilizaremos el punto ***B (B', B'')*** como punto común a ambas rectas.

2. Haremos pasar dos rectas ***a*** y ***b*** por dichos puntos.

3. Hallaremos las trazas de la recta ***a*** y ***b.*** Figura 29.

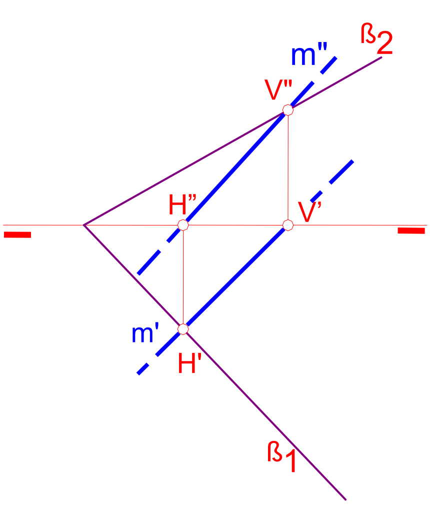
4. SITUACIÓN DE RECTAS SOBRE PLANOS

Una recta pertenece a un plano cuando las trazas homónimas de la recta se corresponden con las del plano.

Por tanto, para situar una recta sobre un plano, bastará con que sus trazas se encuentren sobre las del mismo nombre del plano.

4.1. SITUAR UNA RECTA OBLICUA *m* EN UN PLANO OBLICUO β_1.

Bastará con que las trazas de la recta ***m (m'-m'')*** estén situadas sobre las homónimas del plano. Es decir ***H'*** debe estar en β_1 y ***V''*** en β_2. Figura 30 a.



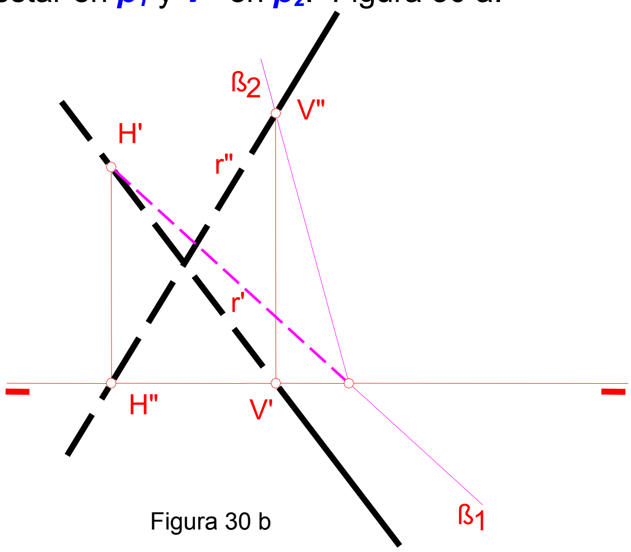


Figura 30 b

En la figura 30 b, se representa una recta oblicua ***r (r'-r"),*** en un plano oblicuo ***β*** ***($β_1$-$β_2$),*** situada en el segundo cuadrante. Obsérvese que su trazas están por encima de la línea de tierra.

4.2. SITUAR UNA RECTA *r* HORIZONTAL EN UN PLANO OBLICUO *δ*.

La traza horizontal de la recta será paralela a la horizontal del plano y la vertical será paralela a la línea de tierra. Esta recta recibe el nombre de **recta horizontal de plano.** Figura 31**.**

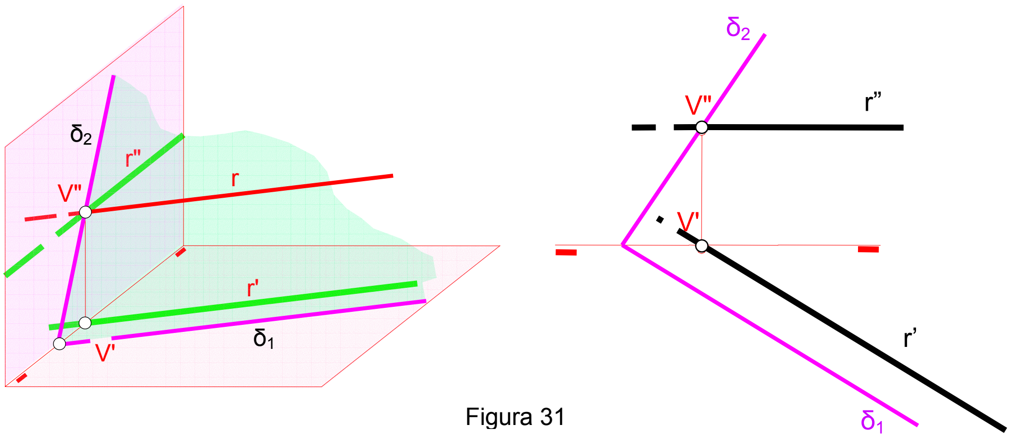


Figura 31

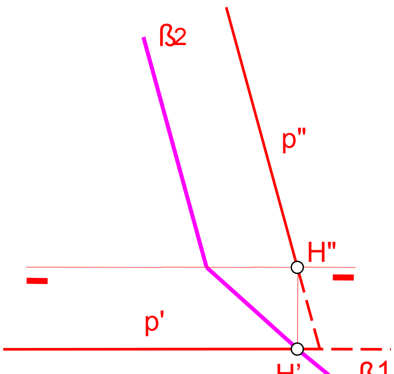


Figura 32

4.3. SITUAR UNA RECTA FRONTAL *p* EN UN PLANO OBLICUO *β*.

La traza vertical de la recta ***r "*** será paralela a la traza vertical del plano ***$β_2$*** y la horizontal ***$β_1$*** será paralela a la línea de tierra. Figura 32.

4.4. DIBUJAR UNA RECTA *r* PARALELA A LA LÍNEA DE TIERRA EN UN PLANO *α* PARALELO A LA LÍNEA DE TIERRA.

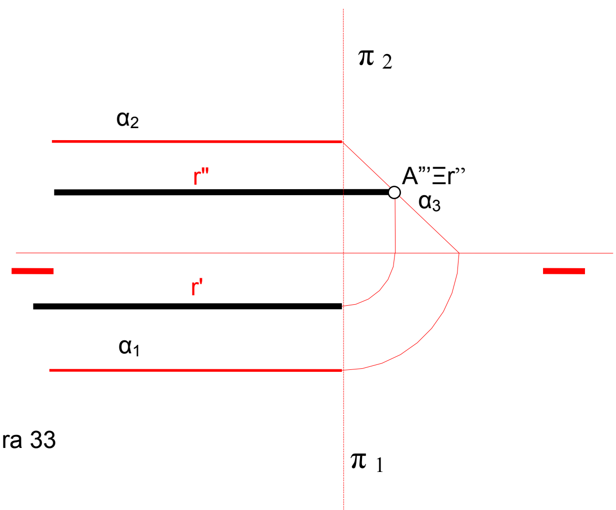
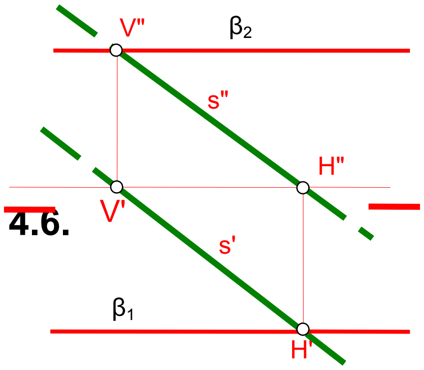


Figura 33

Para su representación, tendremos que dibujar la tercera proyección del plano ***$α_3$***. Figura 33.

4.5. SITUAR UNA RECTA *s* OBLICUA EN UN PLANO *β* PARALELO A LA LÍNEA DE TIERRA. Figura 34.



4.6.

Figura 34

4.7. SITUAR UNA RECTA *n* DE PERFIL EN UN PLANO *α* PARALELO A LA LÍNEA DE TIERRA. Figura 35.

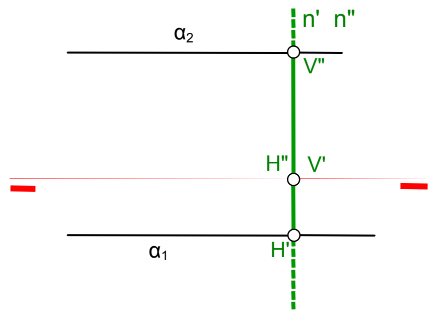


Figura 35

5. INTERSECCIÓN DE PLANOS

Trabajaremos en el espacio. Consideremos dos planos cualquiera ***α*** y ***β***. Figura 36.

Cortemos estos dos planos por otros dos cualquiera, ***μ*** y ***δ***. Seguidamente hallamos la intersección de los planos ***α, β, μ*** de tal forma que tendremos las rectas $i_{\alpha\mu}$ y $i_{\beta\mu}$, rectas que determinan un punto ***A*** común a los tres planos.

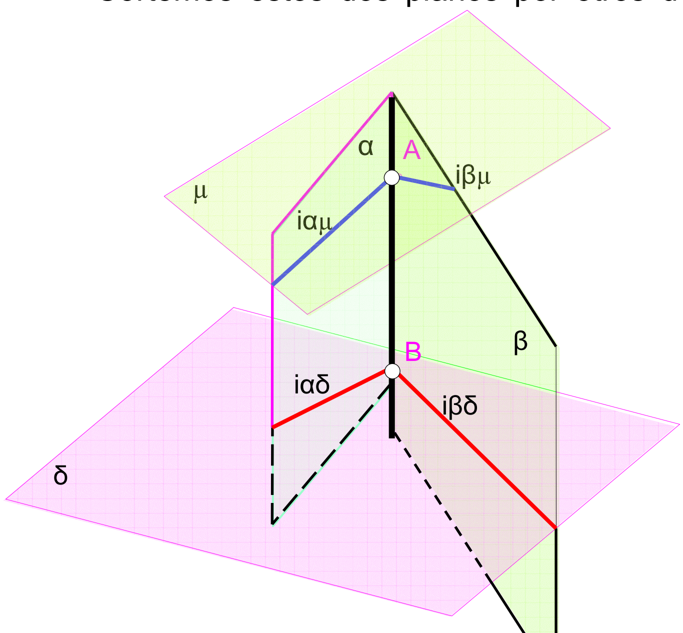


Figura 36

Repetimos la operación con los planos ***α.δ.β***, Obteniendo el punto -***B.***

La unión de los puntos ***A*** y ***B***, nos determinan la intersección de los planos ***α-β.***

Para facilitar esta operación en el plano se toman como planos auxiliares ***μ-δ***, los planos horizontal y vertical del sistema.

5.1. INTERSECCIÓN DE DOS PLANOS OBLICUOS CUALQUIERA

La intersección de las dos trazas horizontales α_1 y β_1 darán un punto de la intersección ***H≡H'***. Y la unión de las trazas verticales α_2 y β_2 darán el punto ***V≡V''.*** Figura 37 a y b.

La recta intersección de ambos planos será la recta ***HV=i***

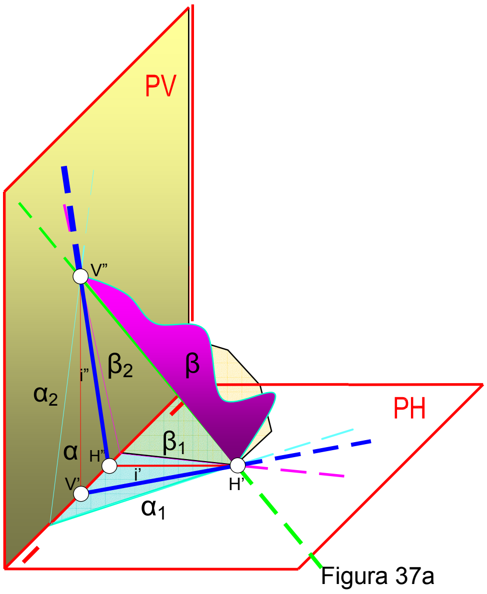


Figura 37a

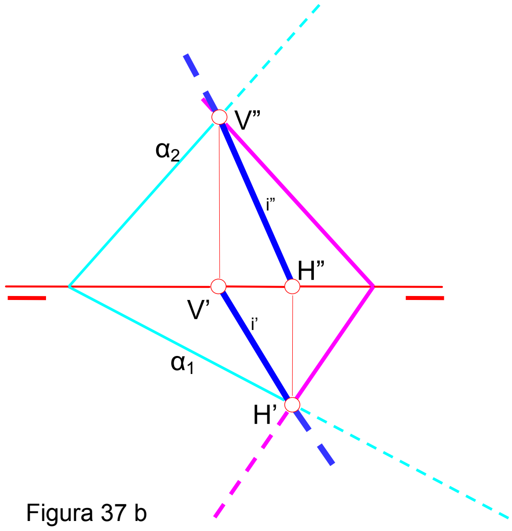


Figura 37 b

5.2. INTERSECCIÓN DE DOS PLANOS PARALELOS A LA LÍNEA DE TIERRA.

Sus trazas serán paralelas a la línea de tierra. Se requiere de la tercera proyección para resolver el problema. Figura 38 a y b.

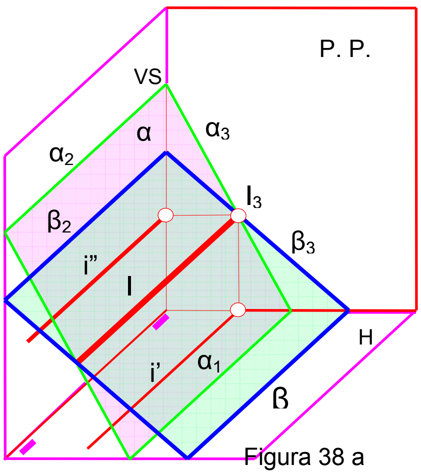


Figura 38 a

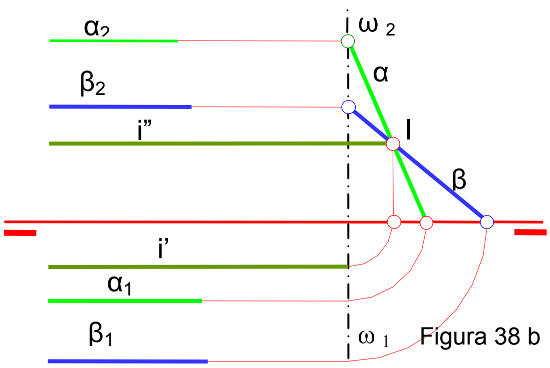


Figura 38 b

5.3. RECTA INTERSECCIÓN DE UN PLANO OBLICUO CON OTRO PARALELO AL HORIZONTAL

Sea el plano oblicuo ***α*** y el paralelo al horizontal ***μ***. Figura 39 a y b.

La recta intersección ***i*** de ambos planos tendrá la traza vertical ***i”*** paralela a la línea de tierra coincidiendo con la traza vertical del plano ***μ₂*** y la horizontal ***i’*** paralela a la traza horizontal del plano ***α₁***.

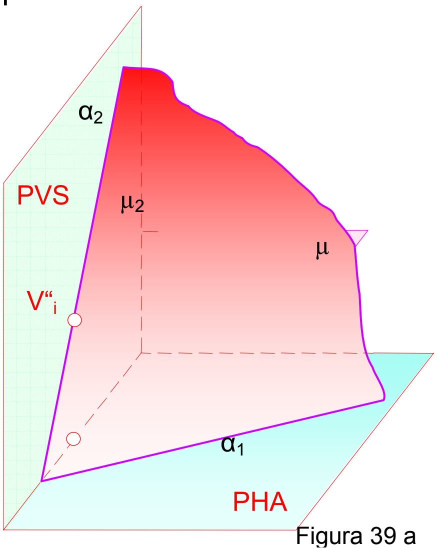


Figura 39 a

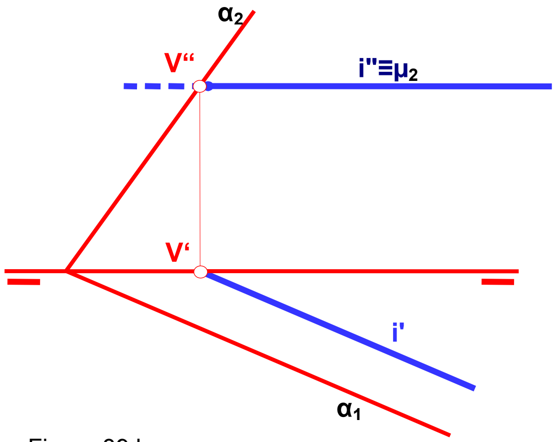


Figura 39 b

5.4. I INTERSECCIÓN DE UN PLANO PARALELO A L. T. CON OTRO QUE PASA POR LA L. T.

1. Representaremos ambos planos en tercera proyección.
2. Hallamos el punto de intersección ***i’”*** de ambos planos.
3. Pasamos dicho punto a primera y segunda proyección ***i’ - i”.*** Figura 40 a y b.

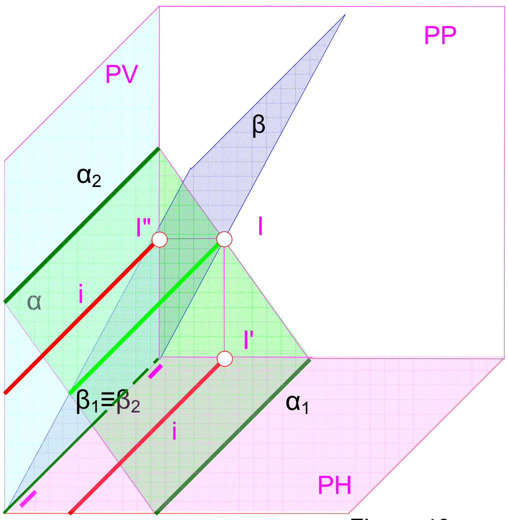


Figura 40 a

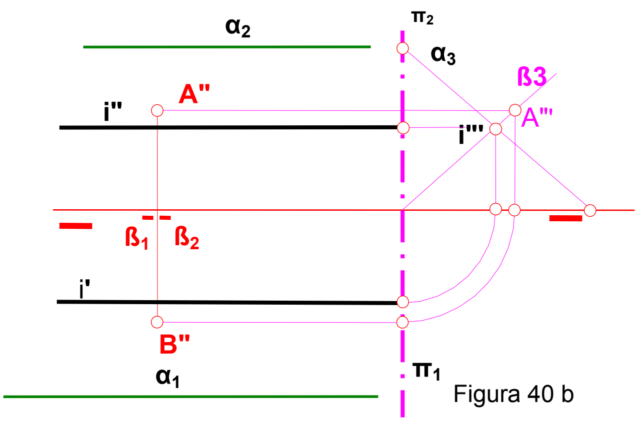


Figura 40 b

5.5. INTERSECCIÓN DE DOS PLANOS PROYECTANTES CUALQUIERA

La intersección será una recta ***i(i'-i")*** perpendicular al plano horizontal. Figura 41a y b.

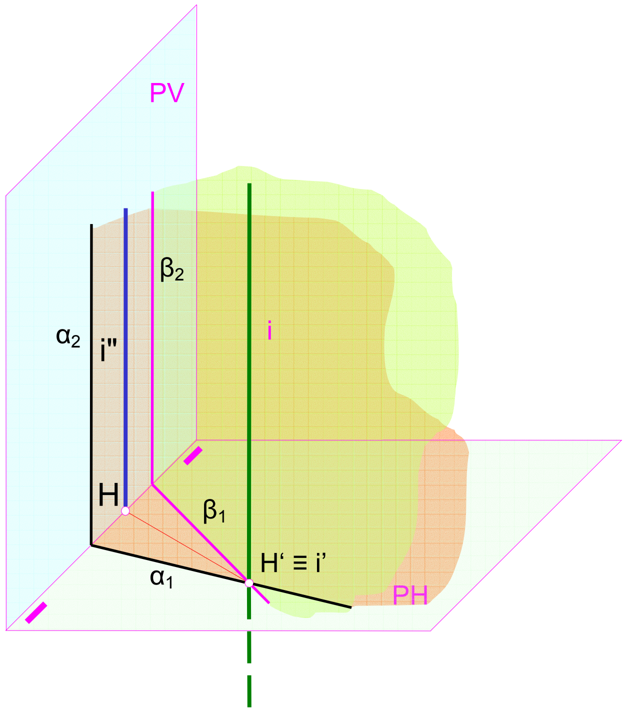


Figura 41 a

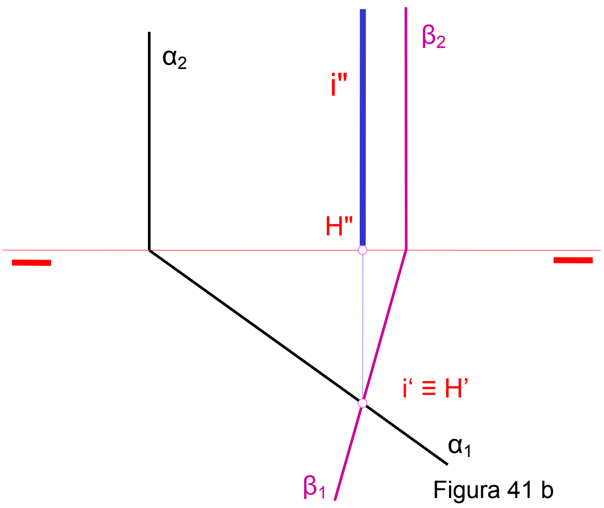


Figura 41 b

5.6. RECTA INTERSECCIÓN DE LOS PLANOS *α* Y *β* CUYAS TRAZAS SE CORTAN FUERA DEL DIBUJO. (Figura 42)

1. Trazamos un plano cualquiera que corte a los dos dados, por ejemplo un plano paralelo al vertical de proyección ***μ.***

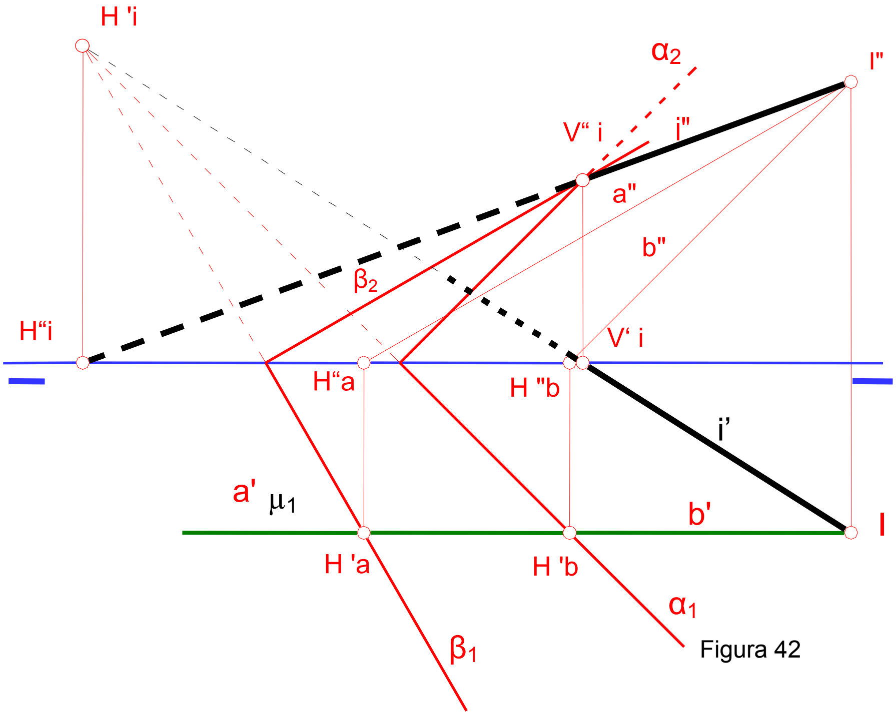


Figura 42

2. Hallamos la intersección del plano ***μ*** con ***α*** y ***β***, que nos determinan las rectas ***a(a'-a")*** y ***b(b'-b")***.

3. El punto ***I (I'- I")***, será común a la intersección de los tres planos, y por tanto será uno de los puntos que buscamos.

Podemos comprobar el resultado prolongando las trazas horizontales de los planos.

5.7. PUNTO

INTERSECCIÓN DE TRES PLANOS. (Figura 43).

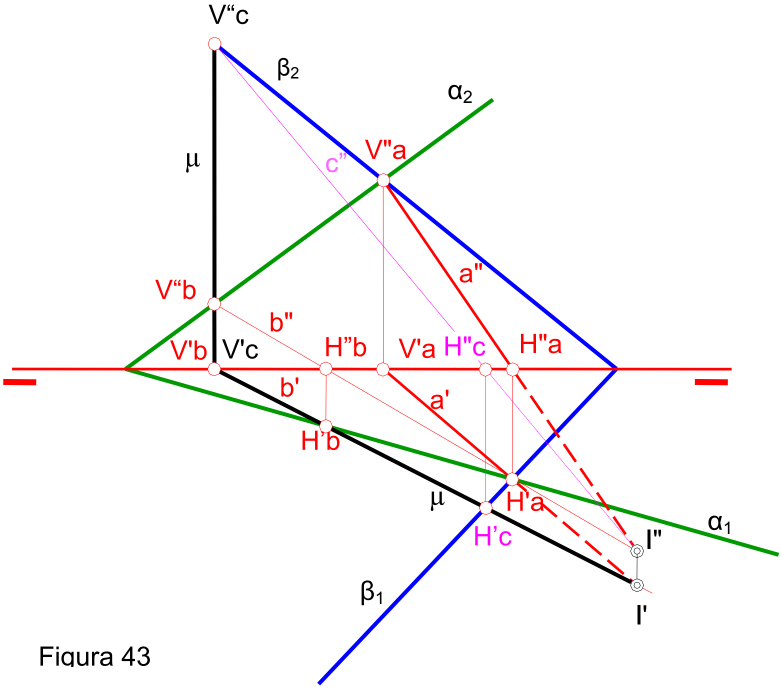


Figura 43

El punto común a tres planos dados ***α, β, μ,*** vendrá dado por la intersección de las rectas comunes a dichos planos.

1.- Hallaremos la intersección de los planos ***α*** y ***β***, que nos determina las proyecciones ***a” y a’***.

2.- Seguidamente hallamos la intersección de un plano cualquiera de los anteriores con el plano ***μ,*** resultando la recta ***b” –b’.***

El punto de intersección de la recta ***a’*** y ***b’, a”*** y ***b”***, será el punto de intersección ***I’- I”,*** buscado, común a los tres planos.

Podemos comprobar lo realizado hallando la tercera recta ***c***.

5.8. PUNTO INTERSECCIÓN DE RECTA Y PLANO

La intersección del plano ***α*** con la recta **r,** se logrará de la forma siguiente:

1.- Se hace contener a la recta ***r*** en un plano cualquiera, plano ***β***.

2. Hallamos la intersección de ***β*** con ***α*** , ***I*** $_{\beta\,\alpha}$. Dicha intersección cortará a la recta en el punto ***I*** que será el punto buscado. Figura 44a y b.

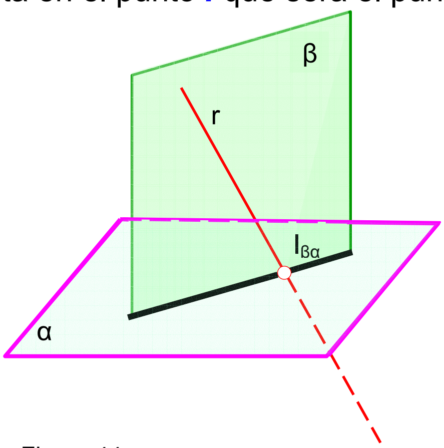


Figura 44 a

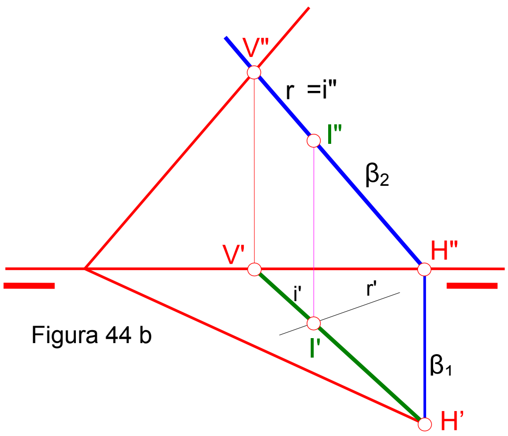


Figura 44 b

En el plano operamos de la misma forma. Como plano auxiliar tomaremos uno que nos facilite la resolución de forma rápida, por ejemplo uno de los proyectantes de dicha recta ***β (β*** $_1$***- β***$_2$***).***

5.9. PUNTO INTERSECCIÓN DE RECTA *r* PERPENDICULAR AL HORIZONTAL, CON UN PLANO OBLICUO *φ*. (Figura 45).

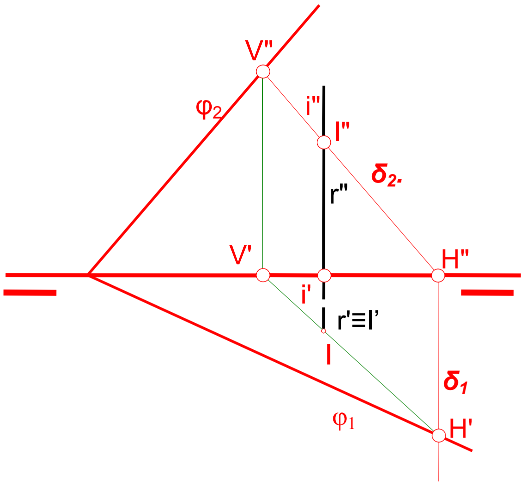


Figura 45

La recta vendrá dada por sus proyecciones ***r'-r''.***

Por ***r'*** haremos pasa un plano proyectante vertical ***δ₁-δ₂.*** Seguidamente determinaremos su intersección con ***φ₁-φ₂***, punto ***I'-I''.***

5.10. PUNTO INTERSECCIÓN DE RECTA *r* PARALELA A LA LÍNEA DE TIERRA CON UN PLANO OBLICUO *α*. Figura 46

1. Utilizamos un plano de perfil ***π*** ***(π₁-π₂.***

2. Hacemos contener a la recta ***r*** en un plano auxiliar paralelo a la línea de tierra ***μ (μ₁-μ₂)***. La única condición es que pase por el punto ***A***.

3. Hallamos la intersección de ambos planos, recta ***i (i'-i'').*** El

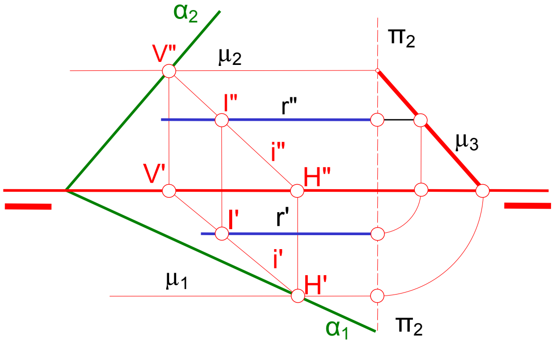


Figura 46

punto ***I'-I''***, será la solución.

6. PARALELISMO Y PERPENDICULARIDAD

6.1. TEOREMA DE LAS TRES PERPENDICULARES:

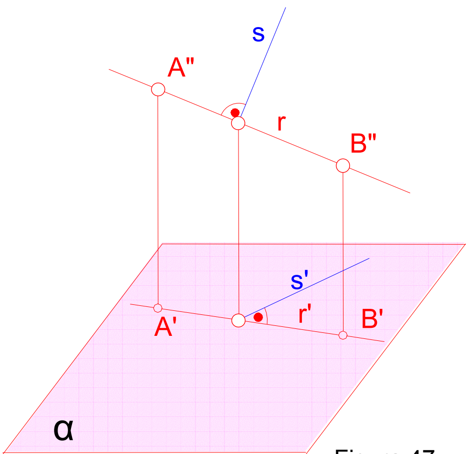


Figura 47

Si dos recta ***r*** y ***s*** son perpendiculares en el espacio y una de ellas por ejemplo la ***s*** es paralela a un plano ***α***, sus proyecciones ***r'*** y ***s'*** también lo serán.

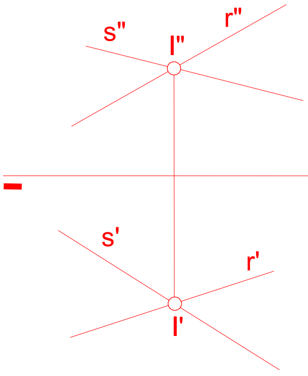


Figura 48 a

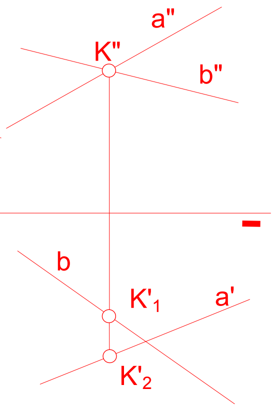


Figura 48 b

6.2. INCIDENCIA ENTRE RECTAS.

Para que dos rectas ***r*** y ***s*** se corten en el espacio, las proyecciones homónimas del punto de intersección ***I*** ***(I'- I")*** han de estar en una misma perpendicular a la línea de tierra. Figura 48a.

En caso contrario, las rectas se cruzarán en el espacio. Figura 48 b.

6.3. PARALELISMO ENTRE RECTAS

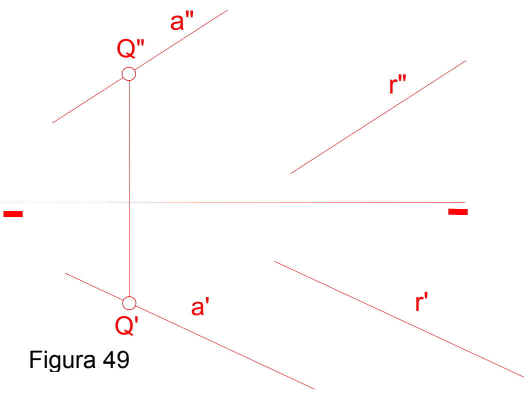


Figura 49

Si dos rectas son paralelas en el espacio, sus proyecciones también lo son. Figura 49.

Ejercicio: Trazar por un punto **Q**, una recta paralela a la recta ***r***.

Bastará con trazar por el punto ***Q'-Q"***, dos rectas ***a'-a"***, paralelas a ***r'-r"***.

6.4. PARALELISMO ENTRE PLANOS

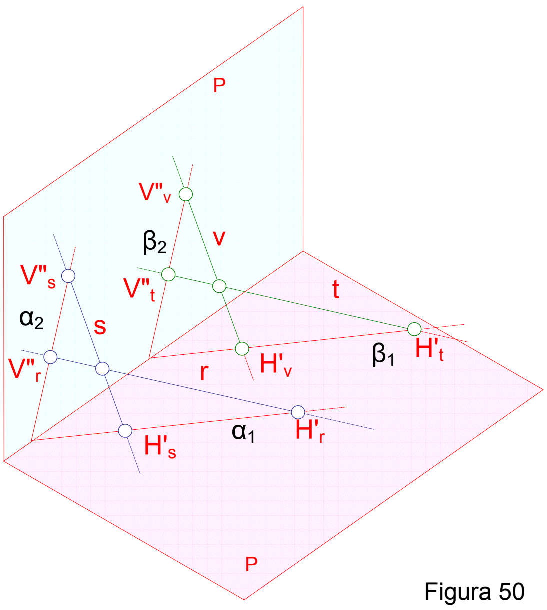


Figura 50

Para que un plano ***β*** sea paralelo a otro ***α***, el primero debe contener a dos rectas ***t*** y ***v***, paralelas a otros dos ***s*** y ***t*** contenidas en el plano ***α***.

Como las trazas del plano son rectas del mismo, bastará con que estas sean paralelas.

6.5. TRAZAR POR UN PUNTO *P* UN PLANO *β* PARALELO A OTRO DADO *α*.

1. Se hace contener en el plano ***α*** una recta cualquiera por ejemplo la recta **s**.

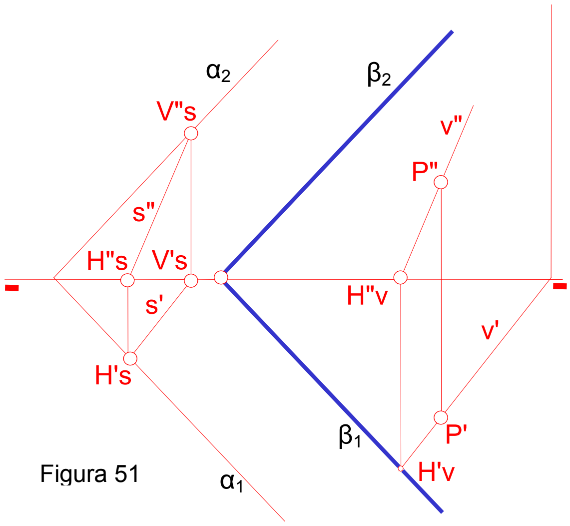


Figura 51

2.- Se traza por el punto ***P***, una recta paralela a ***s***. La traza horizontal del plano pasará por ***H'v*** y será paralela a α_1. Figura 51.

6.6. PARALELISMO ENTRE RECTA Y PLANO

Una recta ***r*** es paralela a un plano ***α*** cuando este contiene a una recta ***s*** paralela a la ***r*** dada. Figura 52a y b.

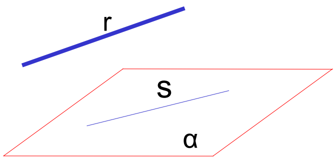


Figura 52 a

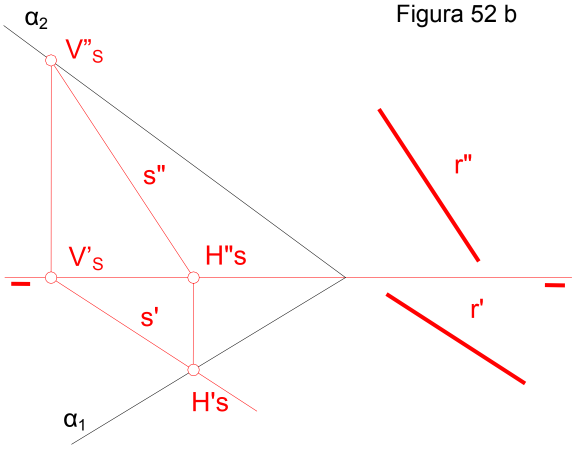


Figura 52 b

6.7. DETERMINAR LAS TRAZAS DEL PLANO *α* QUE CONTENIENDO A LA RECTA *r* SEA PARALELO A OTRA RECTA *s*.

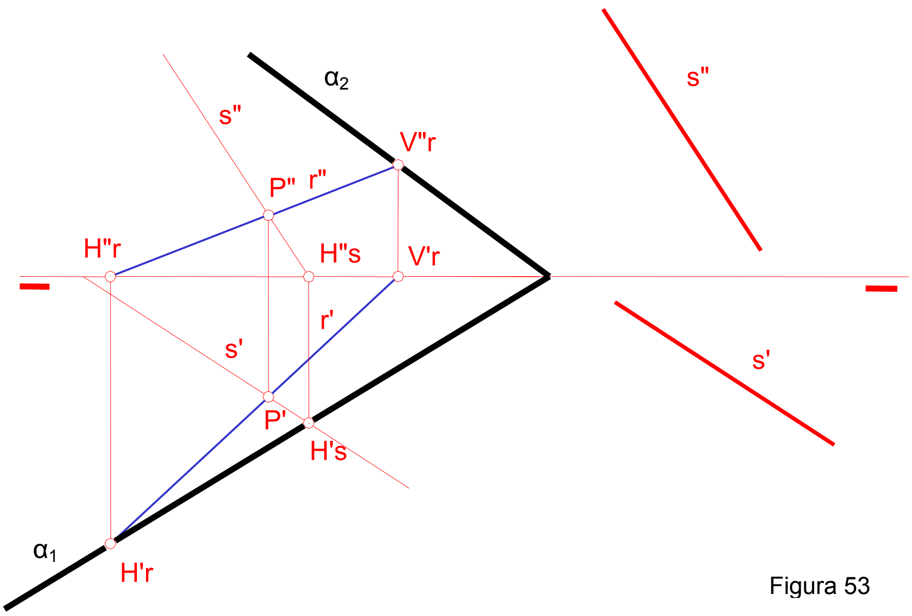


Figura 53

1. Por un punto ***P*** cualquiera de la recta ***r***, trazamos una recta paralela a la dada ***s***.

2. Seguidamente hallaremos el plano que contenga a ambas rectas. Figura 53.

6.8. PERPENDICULARIDAD ENTRE RECTA Y PLANO.

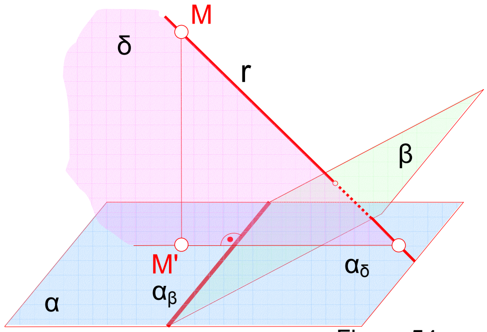


Figura 54 a

Si una recta ***r*** y un plano ***β*** son perpendiculares, lo serán a todas las rectas contenidas en el plano, siendo la traza del mismo una de ellas.

El plano proyectantes ***δ*** que contiene a la recta será perpendicular a ***α*** y ***β*** y por tanto la recta ***α_β*** y ***α_δ*** serán perpendiculares.

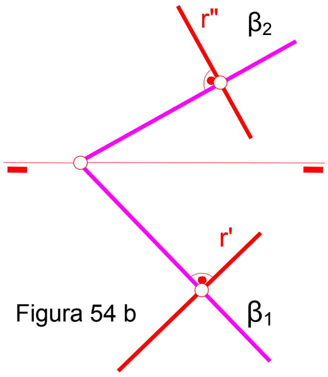


Figura 54 b

Por todo lo anterior, para trazar una recta perpendicular a un plano, bastará con que las trazas de la recta y las del plano sean perpendiculares. Figura 54 a y b.

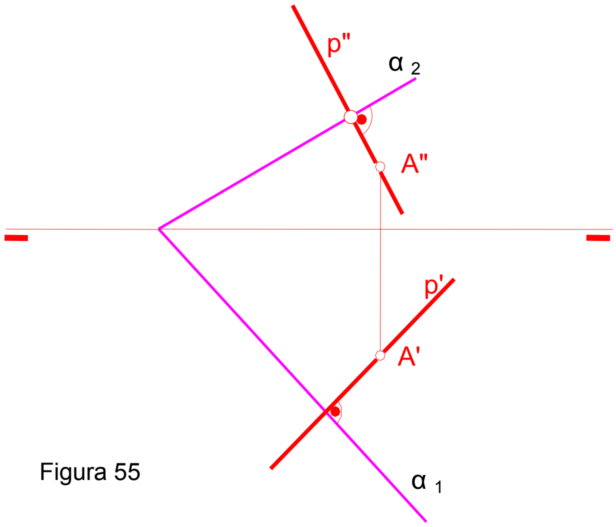


Figura 55

6.9. TRAZAR POR UN PUNTO *A* UNA RECTA *p*, PERPENDICULAR A UN PLANO α .

Bastará con trazar una recta perpendicular a las trazas del plano que y que pase el punto ***A***. Figura 55.

6.10. TRAZAR POR UN PUNTO *Q* UN PLANO *β* PERPENDICULAR A UNA RECTA *s*.

Por el punto ***Q*** trazaremos una recta horizontal de plano ***m (m'-m")***, perpendicular a ***s'***. Figura 56.

La traza del plano pasará por ***V"*** y será perpendicular a ***m"***.

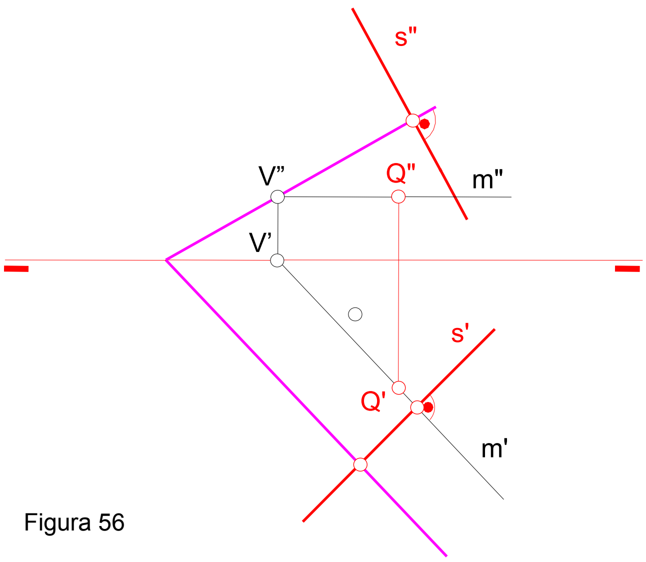


Figura 56

6.11. PERPENDICULARIDAD ENTRE DOS RECTAS.

No existe a simple vista relación gráfica que nos permita ver la perpendicularidad entre dos rectas, tal y como podemos apreciar en la figura 57b.

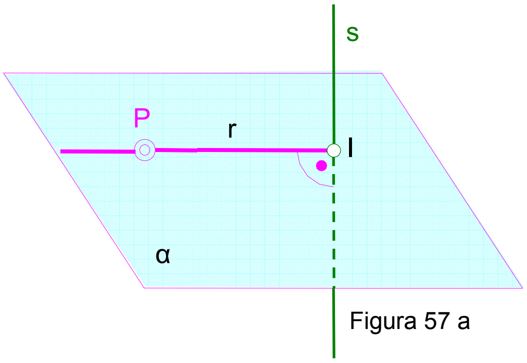


Figura 57 a

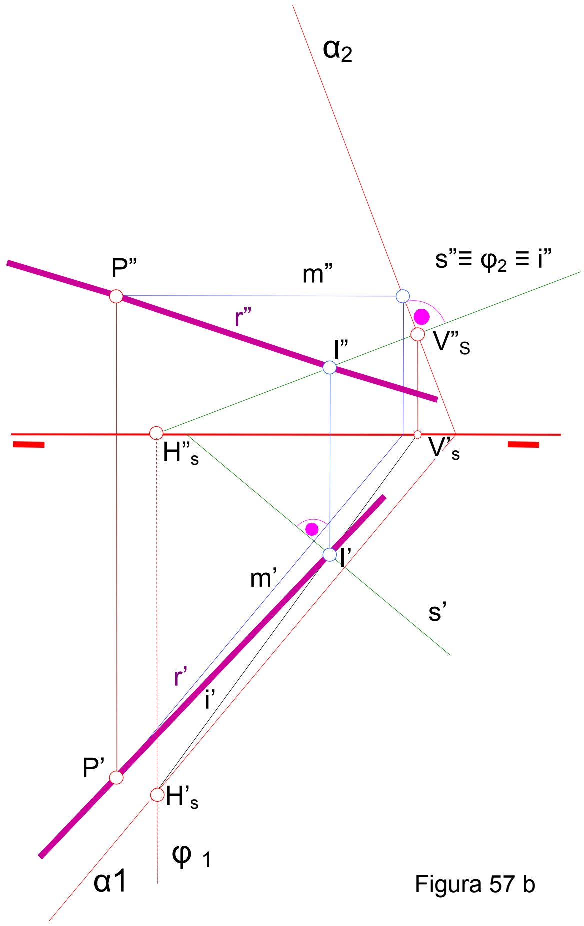


Figura 57 b

Por tanto nos limitaremos a trazar una recta perpendicular a ***s*** que pase por un punto cualquiera ***P.***

Elegimos un punto cualquiera ***P (P’-P”)*** y trazamos un plano perpendicular ***α(α₁-α₂)*** a ***s (s’-s”)***. Ejercicio 57 a y b.

1. Hacemos contener a la recta ***s*** en un plano proyectante vertical ***φ (φ ₁-φ ₂)***.

2. Hallamos la intersección de los planos ***α*** y ***β.*** Recta ***i(i’-i”).*** El punto ***I’-I”,*** será la intersección de la recta con el plano.

3. Uniendo ***I’-I”*** con ***P’-P”***, tendremos la recta ***r(r’-r”)***, perpendicular a ***s(s’-s”)***.

7. DISTANCIAS

7.1. DISTANCIA ENTRE DOS PUNTOS

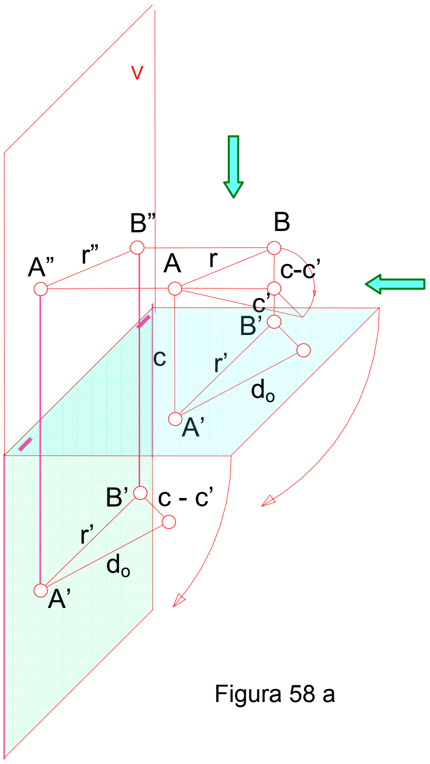


Figura 58 a

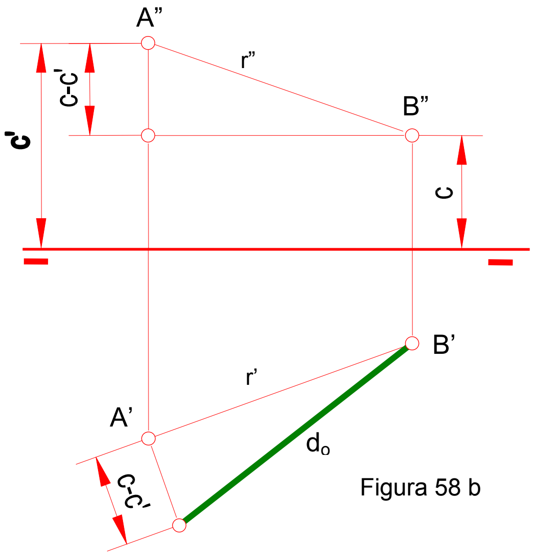


Figura 58 b

La distancia entre dos puntos viene dada por el valor de la hipotenusa ***d_o*** de un triángulo rectángulo cuyos catetos son la diferencia de cotas o alejamientos de los puntos ***A (A’-A”)*** *y* ***B(B’-B”)*** y la proyección de la recta ***A-B***. Figura 39 a y b.

7.2. MÍNIMA DISTANCIA DE UN PUNTO A UN PLANO. Figura 59a y b.

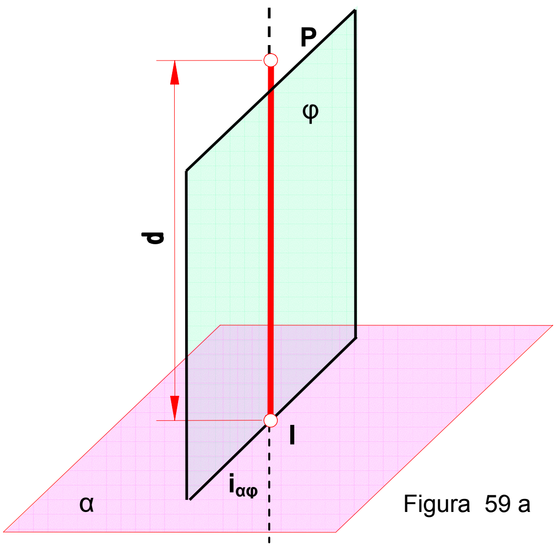


Figura 59 a

1. Por el punto ***P*** se traza una recta perpendicular al plano.

2. Se hace contener a la recta en un plano, ***φ.***

3. Se halla la intersección del plano ***α*** y el plano ***φ***,

4. La distancia será el segmento ***I - P.***

5. La hipotenusa del triángulo rectángulo cuyos catetos son la diferencia de cotas entre el punto ***P*** y la intersección ***I*** será la verdadera magnitud de la distancia del punto al plano.

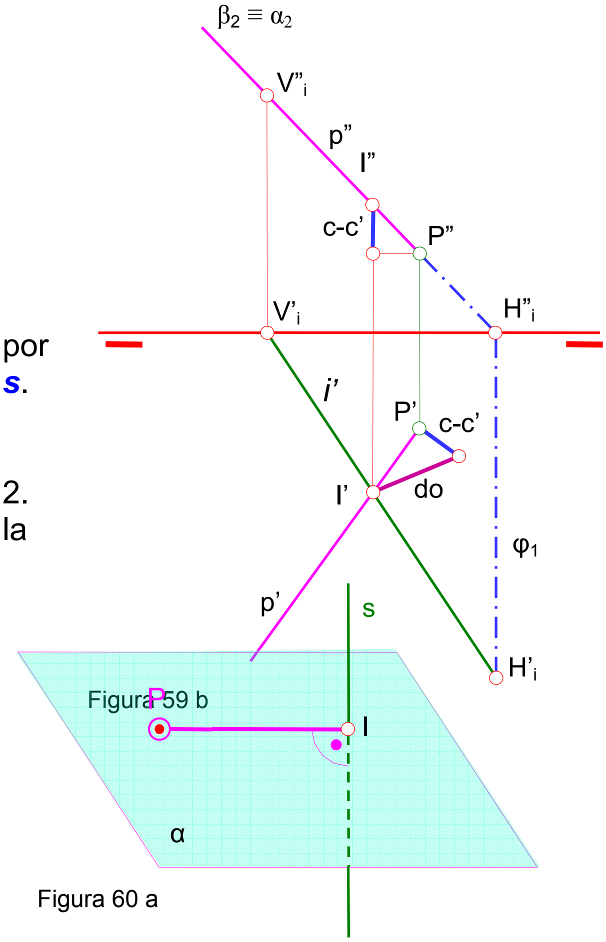


Figura 60 a

7.3. HALLAR LA MÍNIMA DISTANCIA ENTRE EL PUNTO *P (P'-P")*.Y LA RECTA *s (s'-s")*. Figura 60 a y b.

1. Trazamos un plano ***α*** que pase por el punto ***P*** y sea perpendicular a la recta ***s***. Para ello previamente trazaremos una recta horizontal de plano ***m(m'-m")***.

2. Hallamos la intersección del plano ***α*** con la recta ***s***. Ejercicio resuelto anteriormente.

7.4. HALLAR LA MÍNIMA DISTANCIA ENTRE LOS PLANOS *α* Y *β*. Figura 61a y 61b,

Sean los planos ***α*** y ***β***. Por un cualquiera ***t,*** trazamos una perpendicular ***s*** a los planos.

Hallamos la intersección de dichos planos con la recta ***s***, que nos determinan los puntos ***A*** y ***B***, distancia entre ambos planos.

Seguidamente hallaremos su verdadera magnitud.

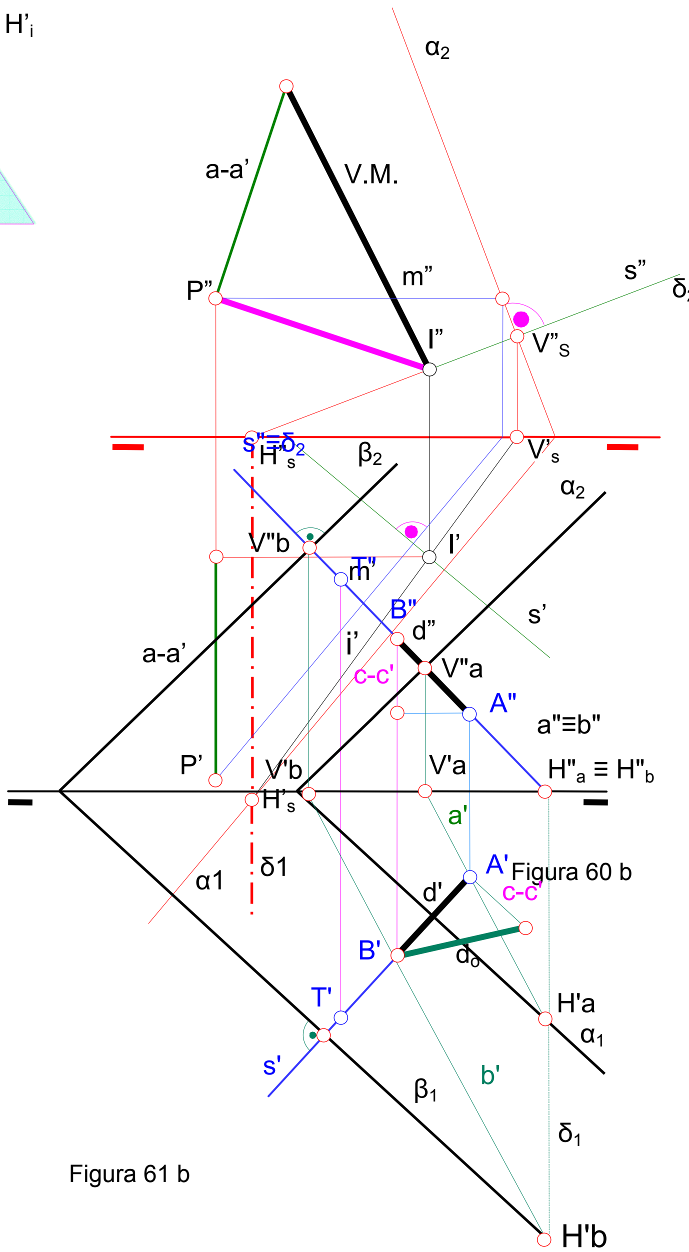


Figura 61 b

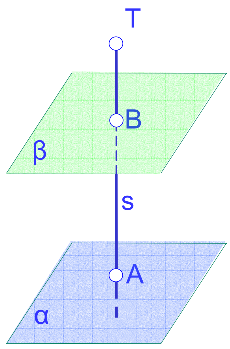


Figura 61 a

8. ABATIMIENTOS

Decimos que abatimos un plano sobre otro, cuando hacemos superponer el primeros sobre el segundo, haciendo girar alrededor de un eje, llamado charnela, que es la intersección de ambos. Con los abatimientos se pretende obtener verdaderas magnitudes de rectas o figuras planas.

1.- Para abatir un punto ***P***, situado en el plano ***α*** , abatimos dicho plano ***α*** que contiene al punto ***P***, utilizando como charnela la intersección de los planos ***α*** y **δ**. Línea ***a-b***. Figura 62 a.

2.- El radio de giro será la mínima distancia del punto a la charnela, la cual se halla como hipotenusa del triángulo rectángulo cuyos catetos son ***P' M*** y ***P' (P)***.

Una vez visto el proceso en el espacio, trabajaremos en el plano.

Sea el punto ***P (P'-P")***.

1.- El primer paso será hallar el radio de giro ***ρ***. Por ***P'***, trazamos una perpendicular y una paralela a la traza horizontal α_1, que la utilizamos como charnela.

2. Sobre la paralela, llevamos el valor de la cota del punto ***c***.

3.- Haciendo centro en ***M*** y con radio ***ρ***, trazamos un arco hasta que corte a la perpendicular ***P'*** en ***Po***, punto abatido.

Hemos realizado el abatimiento en el plano horizontal, podemos repetir la operación en el vertical, la única diferencia será que uno de los catetos será, en este caso, el alejamiento en lugar de la cota. Figura 62 b.

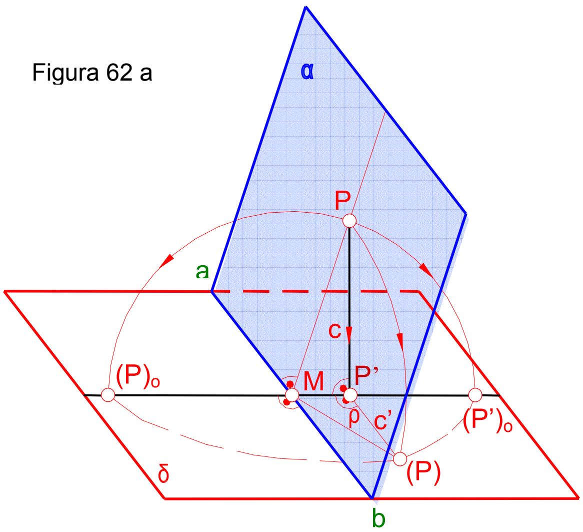


Figura 62 a

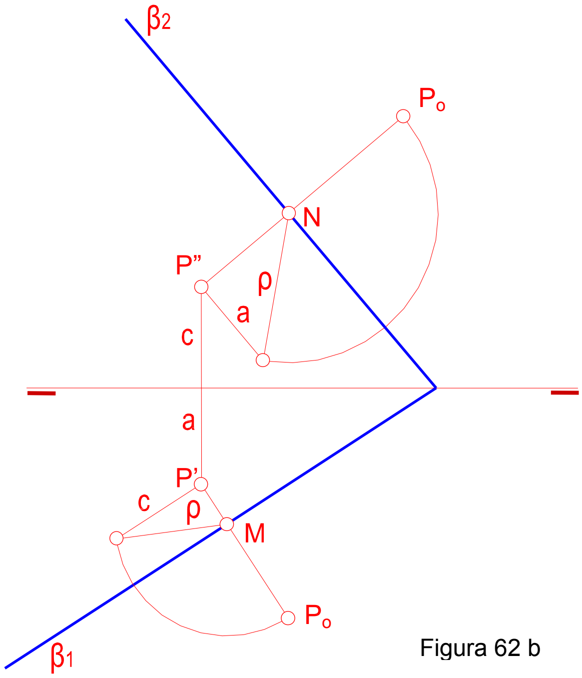


Figura 62 b

8.1. ABATIMIENTO DE PUNTO, RECTA Y TRAZA DEL PLANO.

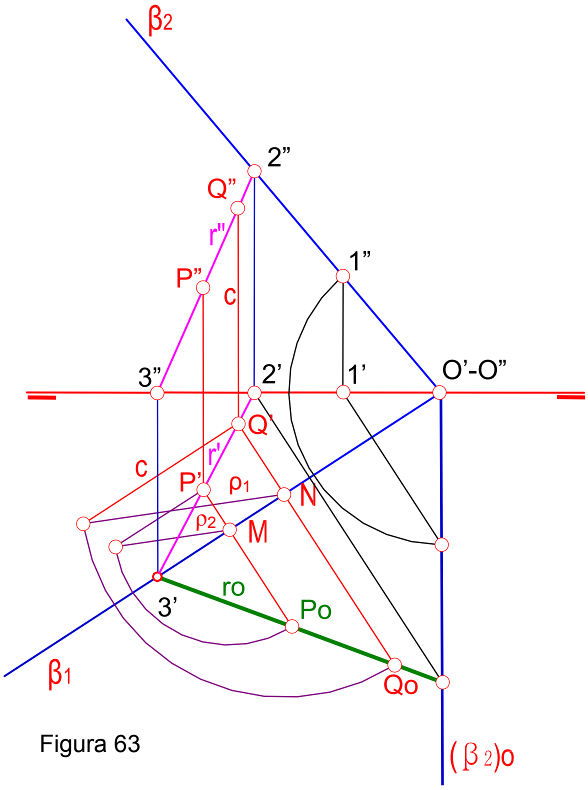


Figura 63

1.- Sea una recta ***r(r'-r")***. Figura 44.

2-. Elegimos dos puntos cualquiera de la recta, por ejemplo, los puntos ***P*** y ***Q*** y los abatimos, caso anterior.

3.- La unión de ***Po*** y ***Qo***, puntos abatidos será la recta ***ro***, abatida.

4.- Para abatir las traza del plano, basta con abatir dos puntos de la misma. El punto ***O'-O"*** se encuentra abatido por ser punto doble, por tanto abatiremos únicamente el punto ***1'-1"***.

5.- La verdadera magnitud de la recta también puede obtenerse abatiendo las trazas de la misma. ***2'-2"***. La traza ***3'*** por encontrarse en la charnela queda batida en si mismo.

8.2. ABATIMIENTO DE UNA FIGURA CUALQUIERA

1.- Partimos de un pentágono irregular, de vértices ***1’, 2’, 3’, 4’, 5’,*** apoyado en el plano horizontal.

2.- Hallamos la proyección vertical, ***1”, 2”, 3”, 4”, 5”.*** del pentágono, aunque esta no es necesaria para obtener la verdadera magnitud***.*** Lo hacemos por medio de horizontales de plano.

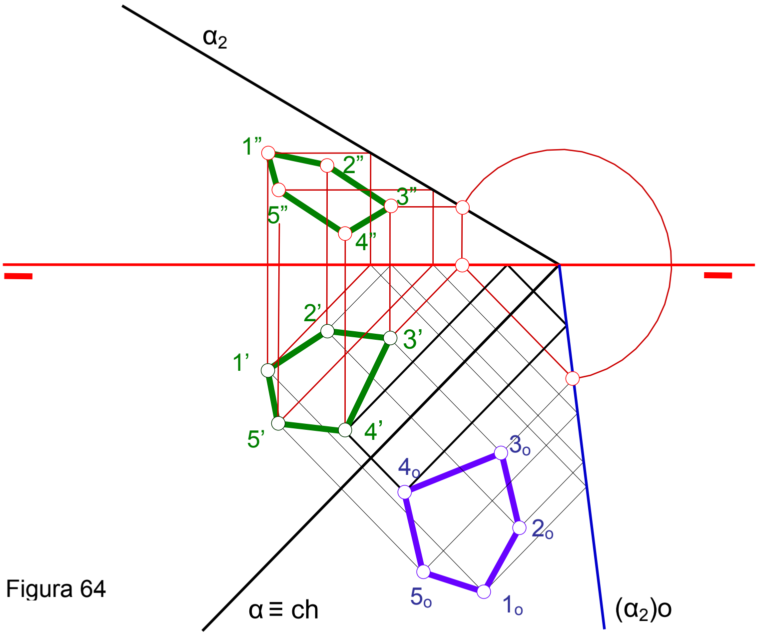


Figura 64

3.- Para hallar la verdadera magnitud de la figura, utilizaremos como charnela la traza ***α_1***. Abatimos el la traza vertical ***α_2*** del plano.

4.- Seguidamente abatimos las rectas horizontales de plano que pasan por los vértices del pentágono.

4.- Seguidamente abatimos las rectas horizontales de plano que pasan por los vértices del pentágono.

4.- Seguidamente abatimos las rectas horizontales de plano que pasan por los vértices del pentágono.

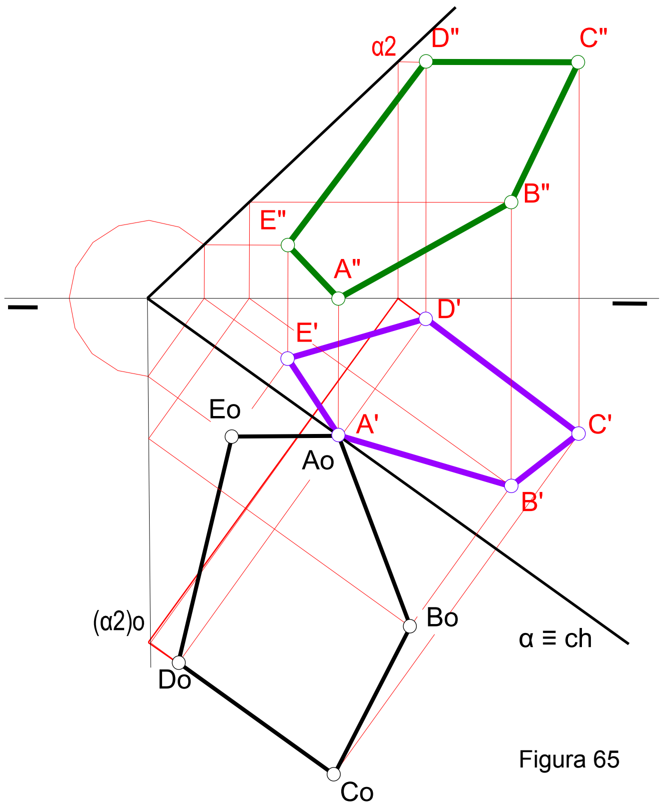


Figura 65

8.3. DADA UNA FORMA POLIGONAL *Ao, Bo, Co, Do*, DETERMINAR SU PROYECCIÓN HORIZONTAL Y VERTICAL, UTILIZANDO COMO CHARNELA LA TRAZA HORIZONTAL DEL PLANO.

1. Hallaremos la traza vertical del plano ***α***.

2.- El punto ***A*** por encontrarse en la charnela
es un punto doble, por lo tanto ***Ao ≡A’.***

3. Mediante horizontales de plano hallaremos el resto de los puntos.

9. CAMBIOS DE PLANO

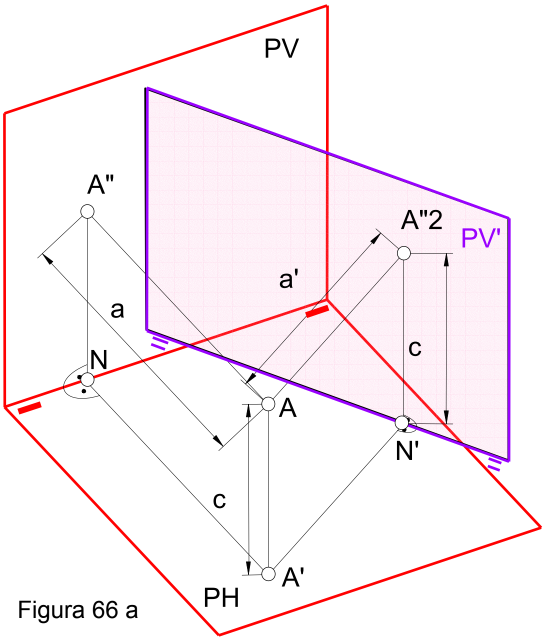


Figura 66 a

Los cambios de plano tienen como objetivo permaneciendo fija la posición de la figura en el espacio variar uno de los planos de proyección de forma que este se coloque en una posición adecuada que nos facilite la representación del objeto.

Cuando varían los planos, cambia la posición de la línea de tierra. Esta nueva línea de tierra se representa por dos trazos gruesos. Figura 66 a y b.

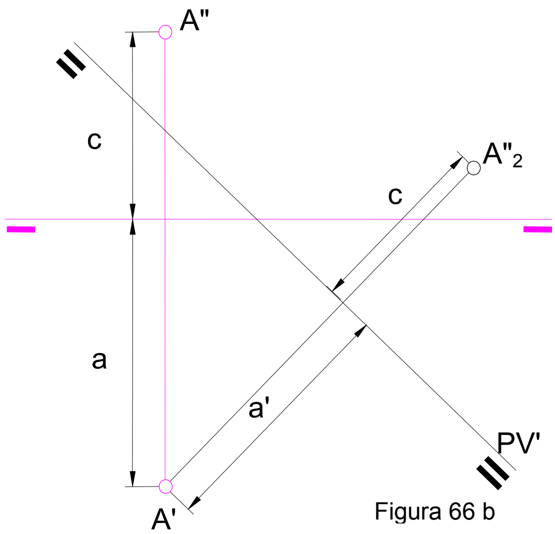


Figura 66 b

El punto ***A"2*** cambia de posición conservando el valor de la cota ***c.*** El punto ***A'*** permanece fijo, variando el valor del alejamiento ***a***. Figura 47 a y b.

9.1. CAMBIO DE UNA RECTA OBLICUA A PARALELA AL HORIZONTAL.(HORIZONTAL DE PLANO)

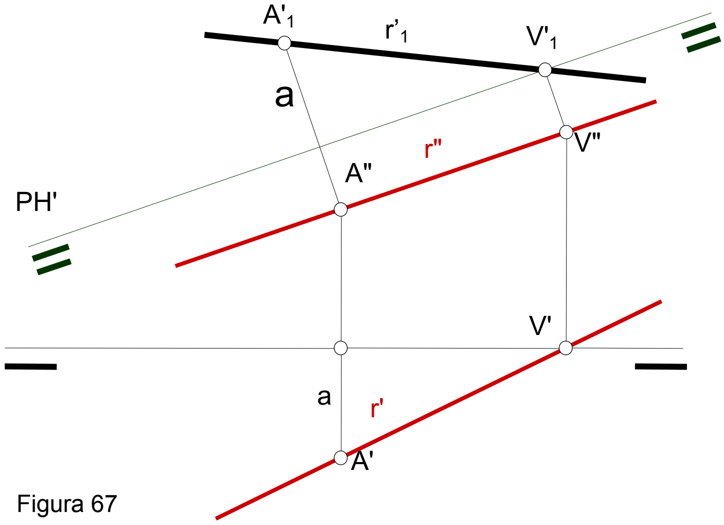


Figura 67

Elegimos una nueva línea de tierra paralela a la traza vertical del plano ya que la proyección vertical de la recta será paralela a la ***L.T***. Para ello cambiamos el plano horizontal.

Cambiamos dos de los puntos de la recta, por ejemplo una de sus trazas ***V*** y un punto cualquiera ***A***. Figura 67.

9.2. CAMBIO DE LAS TRAZAS DE UN PLANO OBLICUO CUALQUIERA.

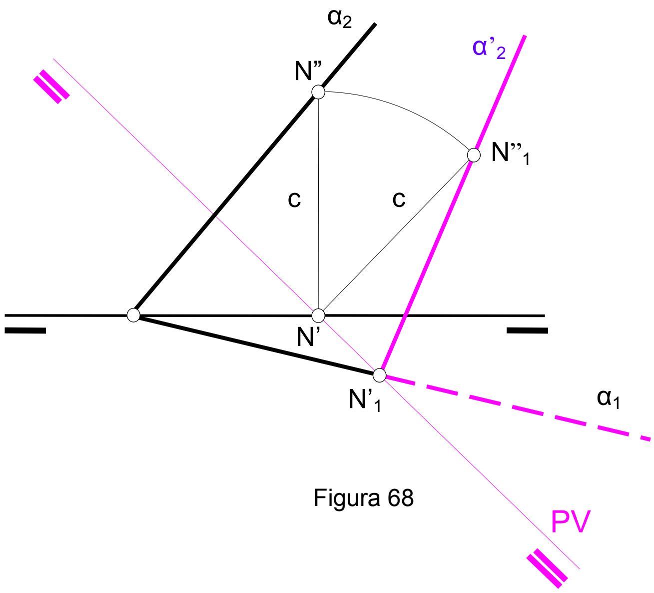


Figura 68

1.- Elegimos una nueva línea de tierra.

2.- Trazamos por el punto ***N’,*** cruce de las dos líneas de tierra, las rectas perpendiculares a cada una de ellas.

3.- Llevamos sobre la perpendicular a la nueva línea de tierra el valor de la cota ***c*** de punto ***N***. Figura 68.

9.3. CAMBIO DE LAS TRAZAS DE UN PLANO OBLICUO A PLANO PROYECTANTE VERTICAL.

Elegiremos la nueva línea de tierra perpendicular a la traza horizontal α_1. Figura 69.

El resto del ejercicio es similar al anterior.

9.4. CAMBIO DE LAS TRAZAS DE UN PLANO OBLICUO A PLANO PROYECTANTE HORIZONTAL.

En este caso la nueva línea de tierra será perpendicular a la traza vertical. Figura 70.

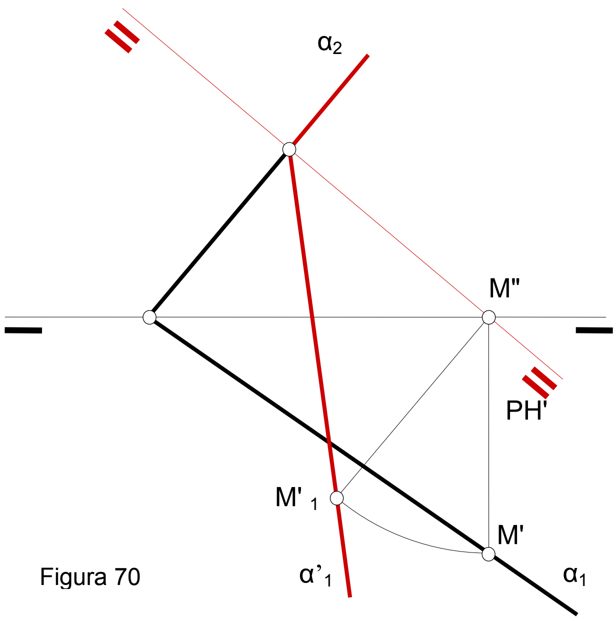


Figura 70

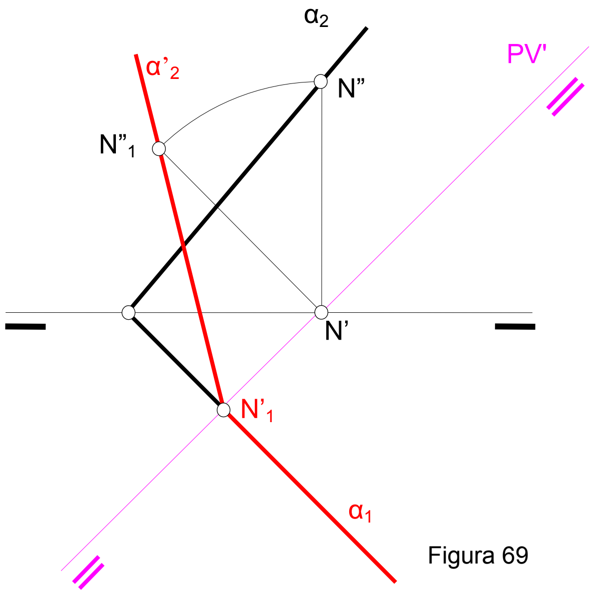


Figura 69

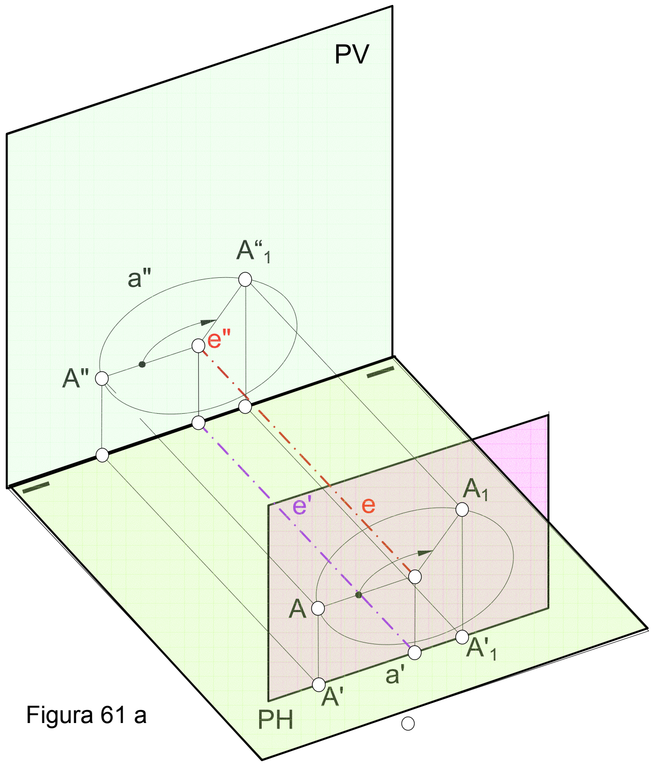


Figura 61 a

10. GIROS

10.1. GIRO DE UN PUNTO

Los giros son otro de los procedimiento para obtener proyecciones en verdadera magnitud.

Los resultados son los mismos que con los cambios de planos, pero en este caso los planos de proyección permanecen fijos y son los puntos los que cambian de posición.

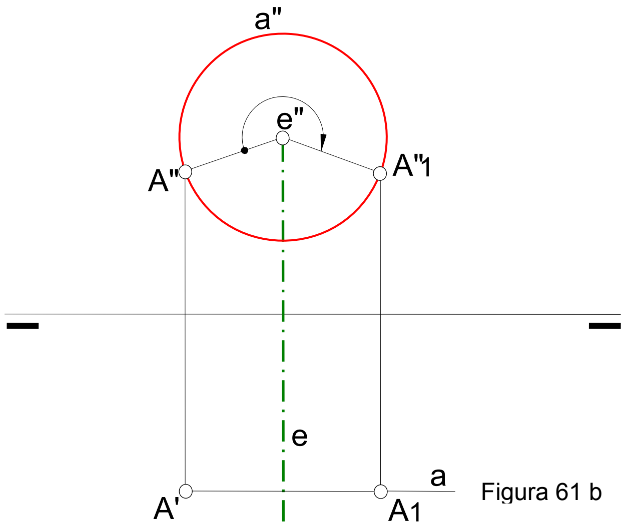


Figura 61 b

10.2. GIRO DE UNA RECTA OBLICUA A OTRA POSICIÓN DE OBLICUIDAD.

El giro de una recta, se limita al giro de dos puntos de la misma. Ambos puntos deben girarse en el mismo Sentido y con el mismo ángulo.

El eje de giro puede adoptarse cruzándose con la recta o cortándola. En nuestro caso adoptaremos un eje de giro ***e’-e”***,que corte a la recta ***r’-r”***, y sea perpendicular al plano horizontal.

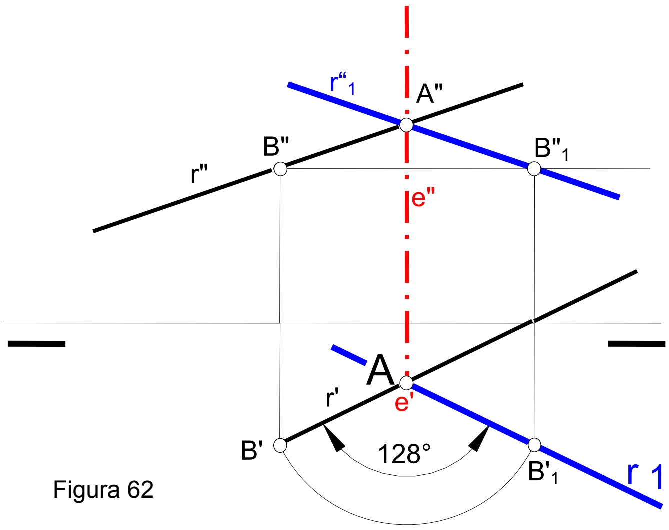


Figura 62

10.3. GIRO DE UNA RECTA OBLICUA A PARALELA AL VERTICAL.

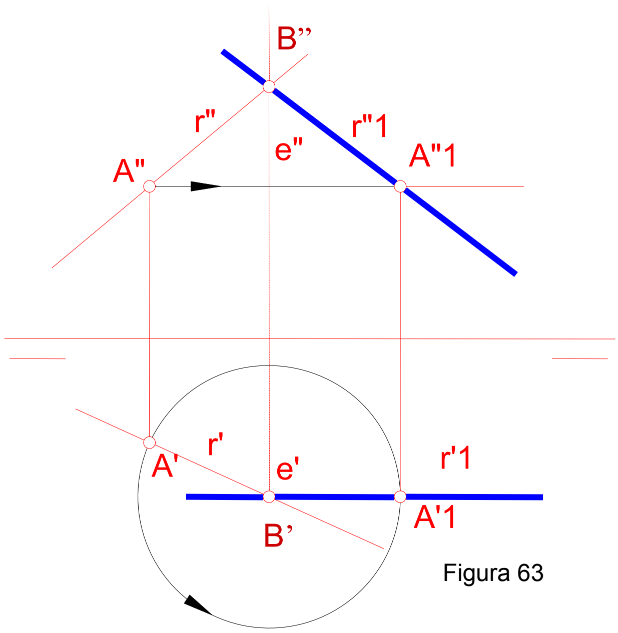


Figura 63

Utilizaremos un eje de giro perpendicular al plano horizontal ***e(e’-e”)*** y que corte a la recta en el punto ***B (B’-B”)***.

1. Giramos el punto ***A’***, el valor del ángulo preciso para dejarla paralela a la línea de tierra. Ocupando la posición ***A”1***.

2. Por ***A”***, trazamos una recta paralela a la L.T.

3. El punto ***B (B’-B”)***, está abatido en si mismo.

11. PIRÁMIDE. REPRESENTACIÓN Y DESARROLLO.

La pirámide está generada por una recta, que sea poya en un punto fijo, llamado vértice, y se desplaza por una superficie poligonal.

Si dicha superficie es un polígono regular y el vértice se sitúa en el centro geométrico del polígono, la pirámide será regular.

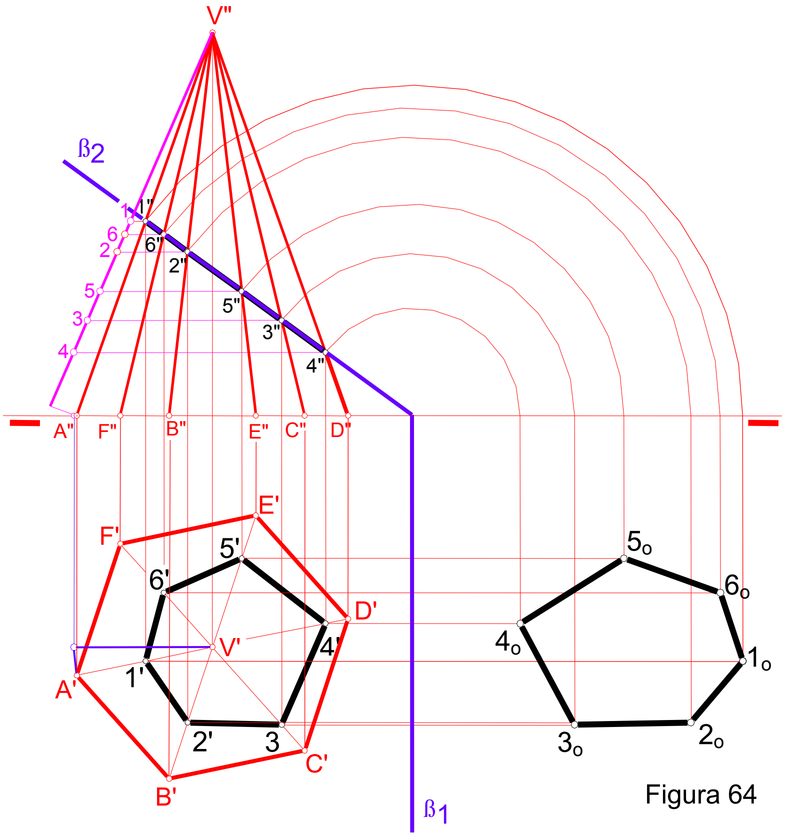


Figura 64

Si el polígono de la base es irregular o la altura de la pirámide no se sitúa en el centro del mismo, será irregular.

11.1. Dada la pirámide recta de base hexagonal apoyada en el plano horizontal. determinar:

1 La proyección vertical.

2. La sección producida por el plano *β* en proyecciones y verdadera magnitud.

1. Partimos de un hexágono regular ***A’-B’-C’-D’-E’-F’***, apoyado en el plano horizontal. Figura 64.

2. Hallaremos la proyección vertical de los puntos anteriores ***A''-B''-C''-D''-E''-F'-***, previamente determinaremos su centro ***V'*** y el vértice ***V''***.

3. Por ser un plano proyectante, su proyección vertical es una línea.

4. Una ver hallada la proyección vertical determinaremos la horizontal.

5. La verdadera magnitud de la sección se halla por abatimiento.

6. La determinación de la verdadera magnitud de la arista de halla por giro de la recta ***V'- A'.***

11.2. Seccionar por el plano β_1-β_2, la pirámide de base cuadrangular, apoyada en el plano horizontal de proyección de la que se conoce la base y el vértice *V'-V''* se pide:

a) Dibujar la proyección horizontal y vertical de la sección producida por dicho plano.

b) Dibujar la verdadera forma de la sección.

c) Realizar el desarrollo lateral de la transformada de la sección dando el punto *V.* figura 65.

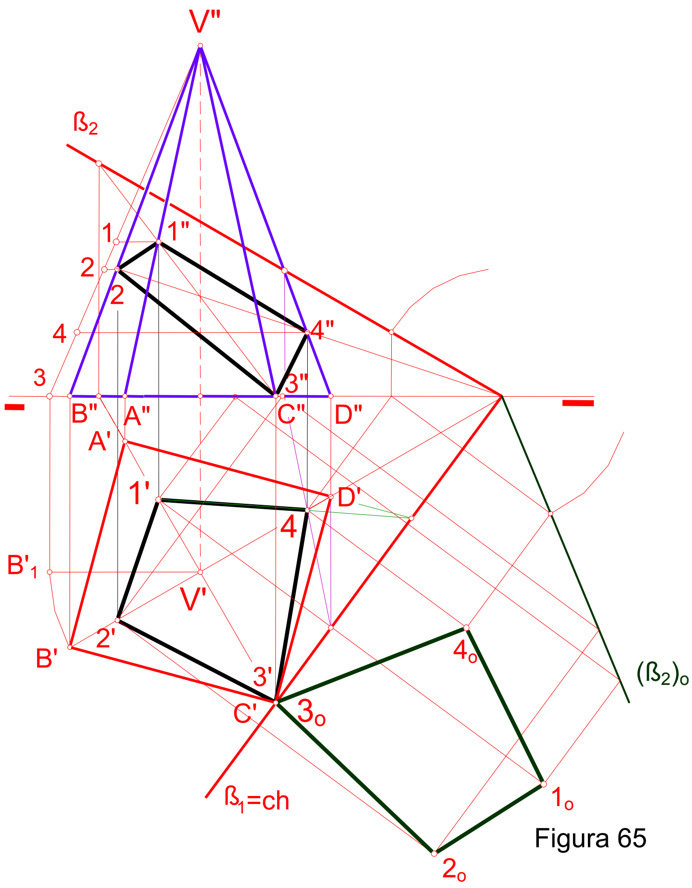


Figura 65

1. Partimos del cuadrado de la base, ***A'-B'-C'-D'***, apoyado en el plano horizontal de proyección. Hallamos sus proyecciones verticales ***A''-B''-C''-D'',*** y el vértice ***V''.***

2. Por tratarse de un plano oblicuo, la traza del plano ***β_2*** no corta a las aristas de la pirámide, sino que las cruza.

3. Por ello para hallar las intersecciones de las aristas de la pirámide con el plano ***β,*** tendremos que hacer contener a cada una de ellas en un plano proyectante, y hallar las intersecciones de ambos planos.

4. Hacemos pasar un plano proyectante por ***A'-C'***, que determina el punto***1''***. El punto ***3',*** se encontrará en ***β_1.*** y ***3''***, en la línea

de tierra.. El punto ***1’*** se obtiene trazando una perpendicular a la L.T.

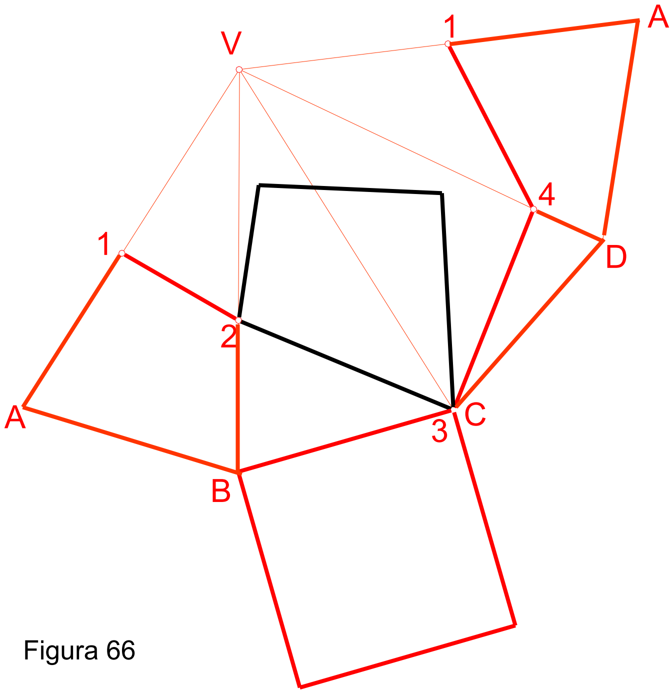


Figura 66

4. El punto ***2”*** y ***4’***, se puede hallar por homología.

5. Para obtener la verdadera forma de la sección, bastará con abatir las horizontales de plano que pasan por cada uno de los puntos ***1’-2’-3’-4’***.

6. Para hallar el desarrollo del a sección, tendremos que determinar la verdadera longitud de la arista de la pirámide, ya que esta es oblicua a los planos de proyección y por tanto no se encuentra en verdadera magnitud. Figura 66.

7. Eligiendo como eje de giro la recta que pasa por ***V’-V”***, giraremos la recta ***B’-V’***, hasta que esta ocupe la posición ***V’-B’₁***, paralela a la línea de tierra. La recta ***3-V”***, será la verdadera magnitud de la arista del a pirámide.

El resto del a construcción puede deducirse de la figura 66.

11.3. Dada la proyección horizontal de la pirámide recta regular de base *1’, 2’, 3’, 4’.* apoyada en el horizontal: determinar

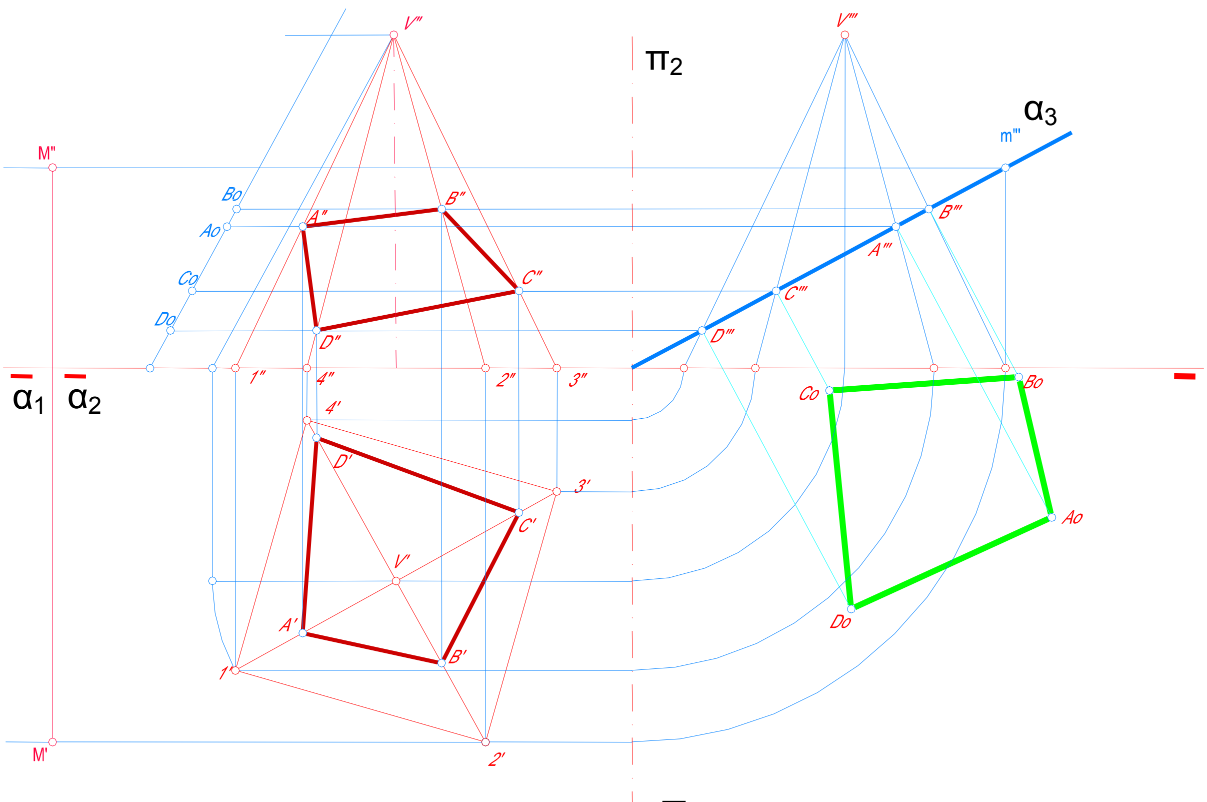


Figura 67a

a) En proyección y verdadera magnitud la sección producida por el plano α(α₁-α₂), que pasa por la línea de tierra).

b) El desarrollo de la misma.

1. Se dibuja un plano cualquiera de perfil ***π*** ***(π_1- π_2)***

2. Se halla la tercera proyección del plano ***α.***

3. Se halla la proyección vertical de la pirámide

4,- Pasamos la pirámide a tercera proyección. La sección en tercera proyección vendrá determinada por la intersección del plano ***α*** con las aristas de la pirámide. Puntos ***A''', B''', C'''….***

5. Hallamos la proyección segunda y primera de dichos puntos ***A'', B'', C''… Y A', B', C'…***

6. La verdadera magnitud se halla trazando perpendiculares por los puntos ***A''', B''', C''' D''',*** y llevando sobre ellas la distancia de las segundas proyecciones al plano vertical tres.

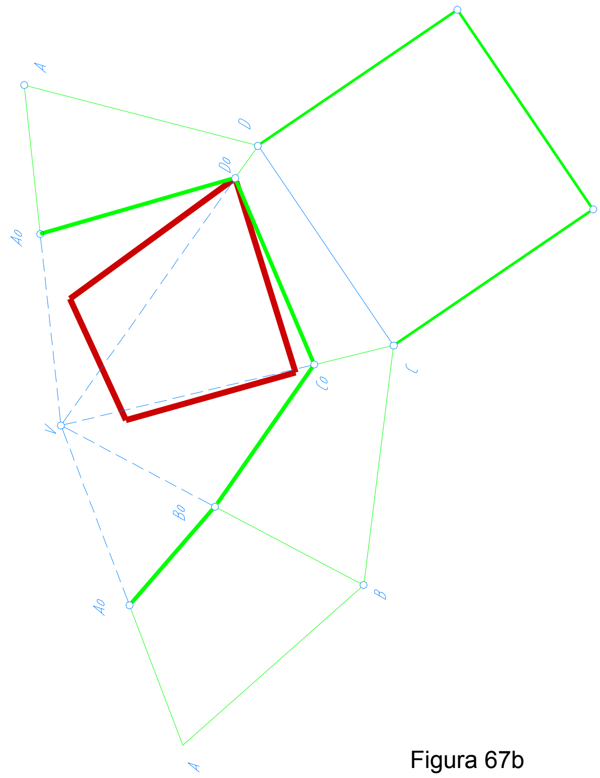


Figura 67b

6. El desarrollo de la sección se realiza como en los ejercicios anteriores. Figura 67b.

11.4. Hallar la proyección horizontal y vertical de la pirámide hexagonal apoyada en el plano horizontal, teniendo en cuenta que la arista *1'-V'* es una recta frontal.

a) Por medio de cambio de plano, hallar la proyección horizontal, vertical y verdadera magnitud de la sección producida por el plano *α. Figura 68.*

1.- Se halla la proyección ***V'*** teniendo en cuenta que es una recta frontal.

2.- Se dibuja la proyección horizontal y vertical de la pirámide.

3.- Hacemos un cambio del plano vertical, de tal forma que este se convierta en proyectante trazando una nueva línea de tierra perpendicular a la traza horizontal de **α_1.**

4.- Hallamos la nueva proyección vertical de la pirámide.

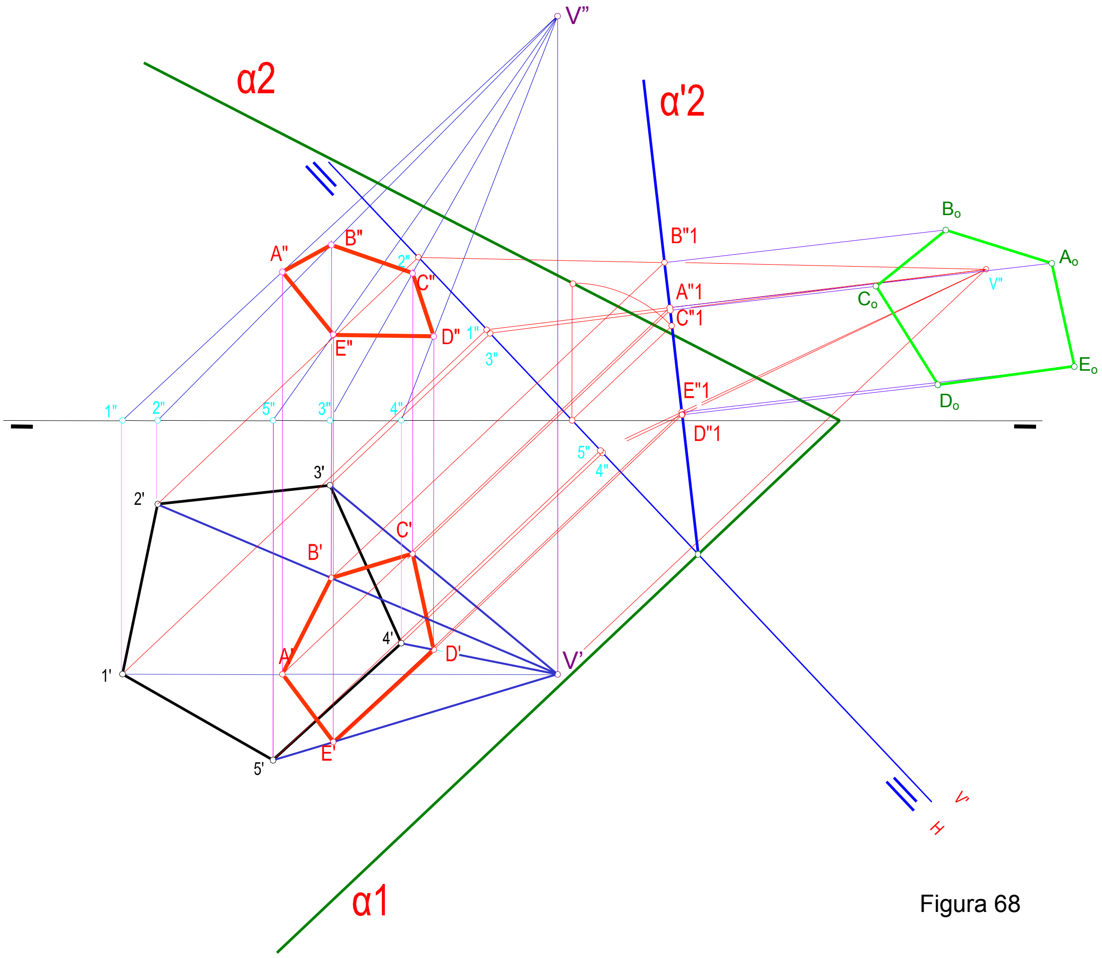


Figura 68

5.- La sección vendrá dada por la intersección del ***α'₂*** con las aristas de la pirámide. Puntos ***A"₁, B"₁, C"₁***. Trazando perpendiculares a la nueva línea de tierra, hallamos los puntos ***A', B', C'.*** Seguidamente se halla la proyección vertical puntos ***A", B", C".***

6.- La verdadera magnitud se obtiene trazando por los puntos ***A"-1***, ***B"-1***, ***C"-1*** y ***D"-1*** perpendiculares a la traza vertical del plano y llevando sobre dichas rectas el valor del alejamiento de los puntos.

11.5. Se da la verdadera magnitud de la base de una pirámide apoyada en el plano *β(β1- β2)*.

a) Hallar la proyección horizontal y vertical de la misma, sabiendo que su altura es 30 mm.

1. Hallamos la proyección horizontal y vertical de la base de la pirámide, obteniendo previamente la traza vertical del plano **β2.**

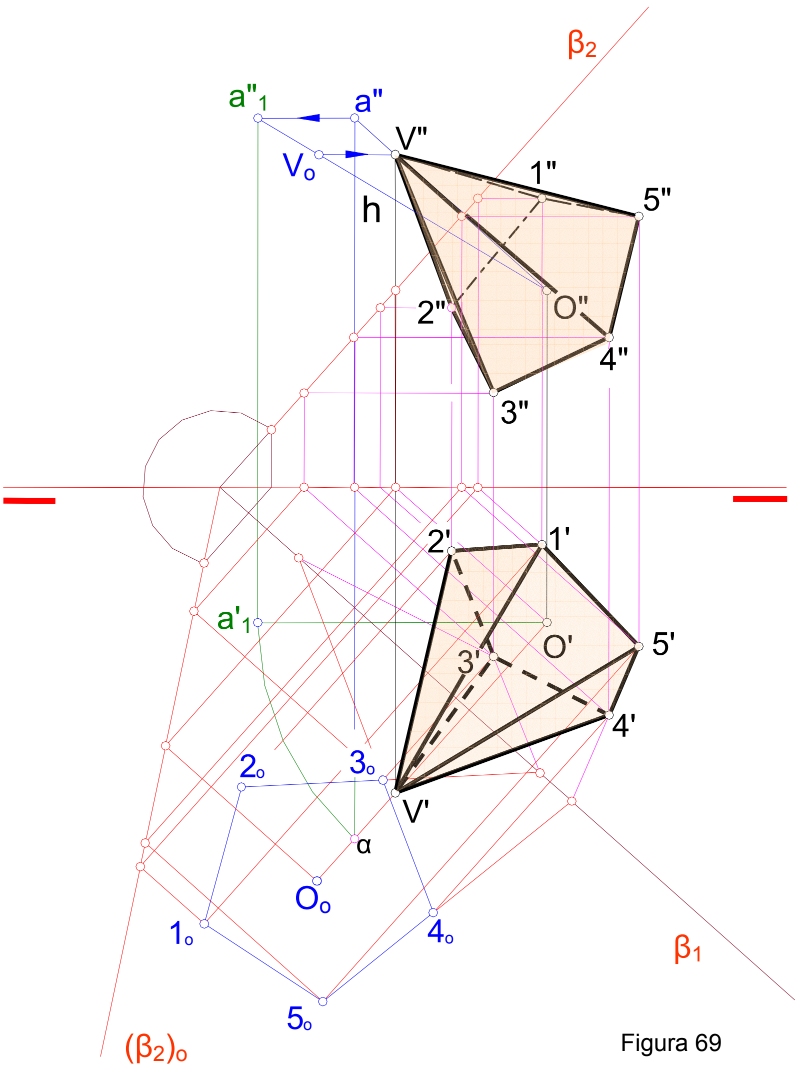


Figura 69

2.Trazamos una recta perpendicular a la trazas del plano ***β (β1-β2)***, que pase por ***O'-O"***.

3. Elegimos un punto cualquiera de la recta anterior. ***a'-a"***. Giramos dicha recta para obtener su verdadera magnitud.

4. Llevamos sobre dicha recta la altura ***h = 30 mm***, de la pirámide, obteniendo el vértice ***Vo*** y seguidamente el ***V'***.

12. PRISMA.

12.1. En la figura se define un prisma recto apoyado en el plano de proyección horizontal, mediante la proyección horizontal de se base y su altura. Se pide:

a) Las proyecciones horizontal y vertical del prisma.
b) Determinar en proyección y verdadera magnitud la sección producida por el plano α. Figura 70.

1. Dibujamos el alzado del prima levantando perpendiculares por los puntos ***1', 2',3' ,4'*** que nos determinan su segunda proyección. Las proyecciones ***5", 6", 7"*** y ***8",*** coincidirán en planta con las anteriores

2. Por ser un prisma recto las proyección horizontal de la sección ***A', B', C', D',*** debe coincidir con los puntos anteriores.

3. Por medio de las horizontales de plano ***h*** y ***l*** se obtienen las proyecciones verticales ***A", B", C", D".***

4. Para hallar la verdadera magnitud de la sección abatimos la traza vertical del plano.

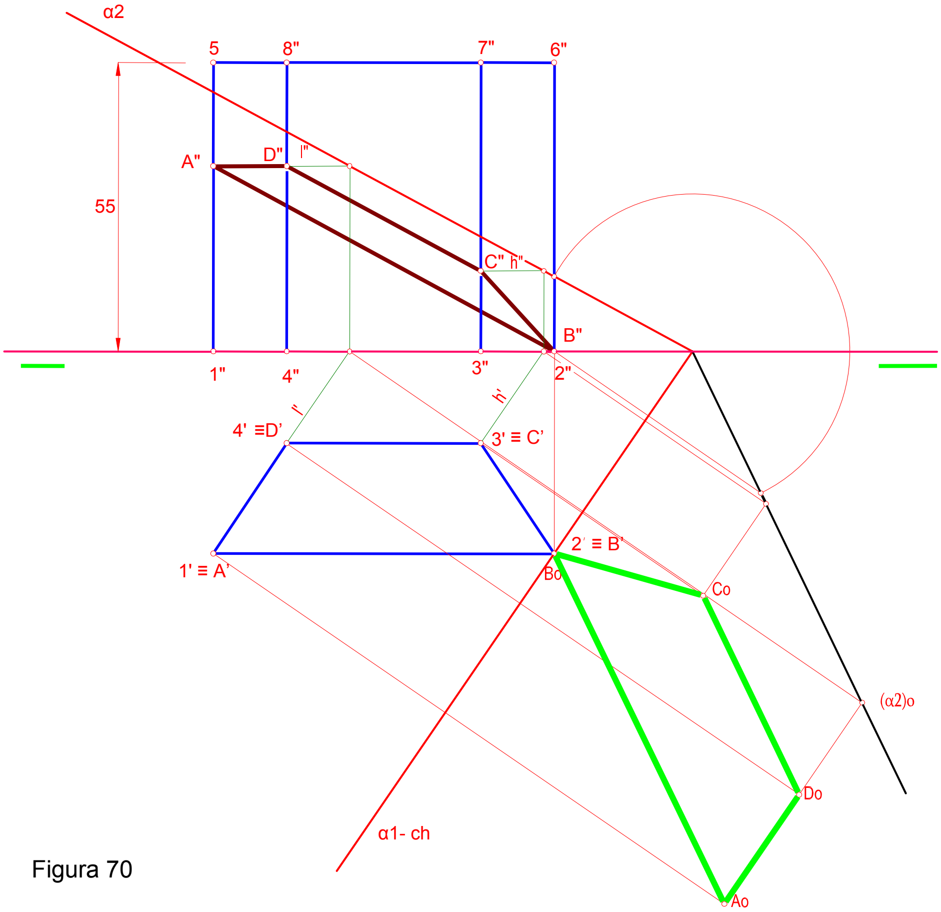


Figura 70

12.2. Se da un prisma oblicuo de base pentagonal apoyado en el plano horizontal de proyección.

a) Dibujar la proyección vertical del mismo.

b) Determinar en proyecciones y verdadera magnitud la sección producidas por el plano oblicuo α. Figura 71.

1.- Para resolver el ejercicio deben de darnos la proyección horizontal del prisma y la inclinación de una de las aristas.

2.- El ejercicio se resolverá por cambio del plano vertical hasta convertirlo en proyectante. Ejercicio resuelto anteriormente.

3. Como puede observarse los puntos ***3’*** y ***4’***, se encuentran en las trazas del plano y por tanto sus proyecciones ***3”*** y ***4”***,estarán en la línea de tierra.

3.- La sección vendrá dada por los puntos $1''_1$, $2''_1$, $3''_1$, $4''_1$, $5''_1$. que pasados a primera y segunda proyección tendremos las secciones buscadas.

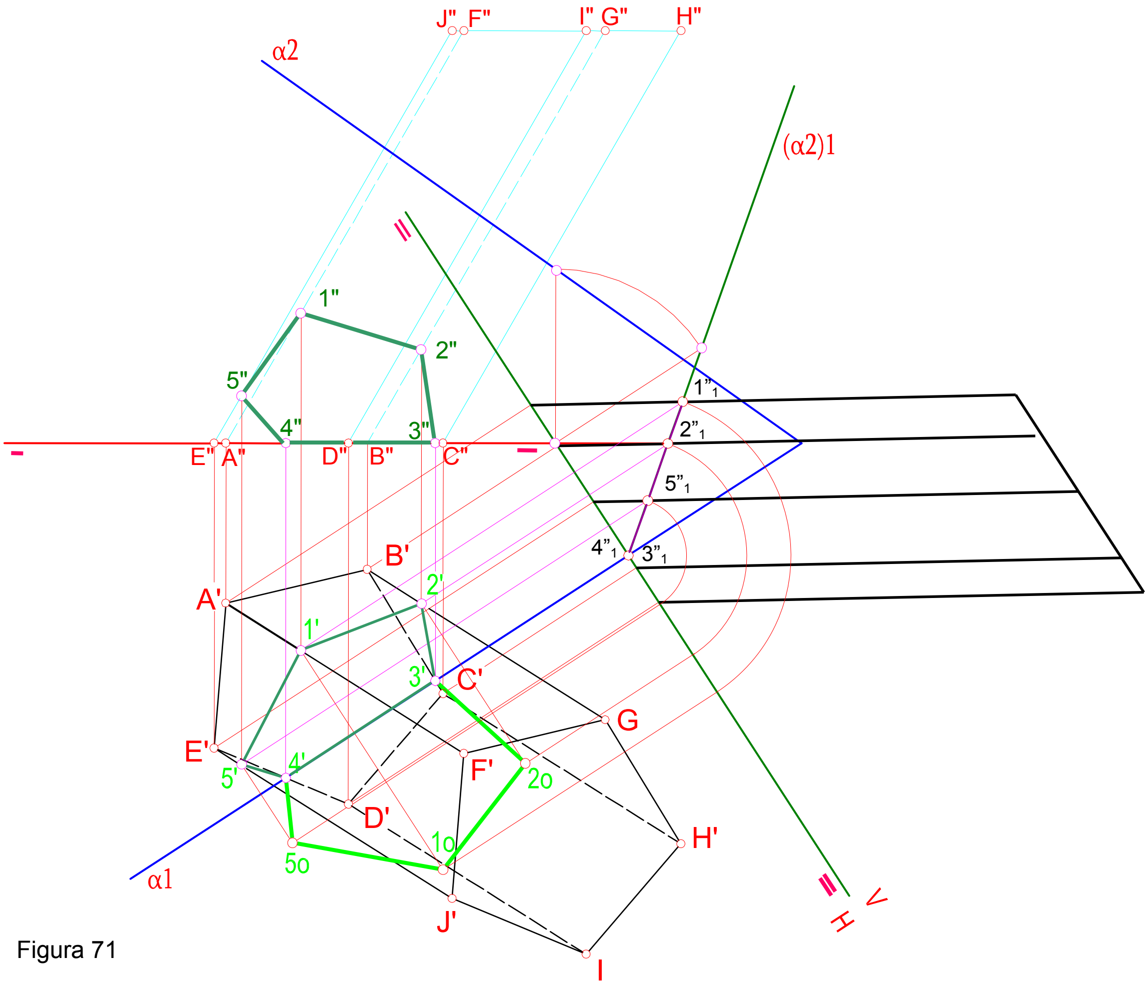


Figura 71

12.3. Dado un prisma de base pentagonal apoyado en el plano Horizontal, se pide.

a) La proyección vertical del mismo.

b) Las proyecciones y verdadera magnitud las secciones producidas en el prisma por el plano *β* paralelo a la línea de tierra.

c) El desarrollo del prisma resultante como consecuencia de la intersección. Figura 72 a y b.

1.- Dibujamos el alzado del prisma, levantado perpendiculares por los puntos ***1’, 2’,3’,4’,5’.*** A partir de las proyecciones verticales de estos puntos llevamos la altura del prisma

2.- Una paralela a la línea de tierra determina los puntos ***6”, 7”, 8”, 9” y 10”.***

3.- Pasamos el prisma a tercera proyección y hallamos la intersección de este con ***β3*** que nos determinan los puntos ***A’’’, B’’’, C’’’, D’’’, E’’’***. Hallando a continuación las proyecciones segundas. La proyección primera debe coincidir con los puntos ***1’, 2’,3’,4’,5’***, por ser las aristas perpendiculares al plano horizontal.

4.- La verdadera magnitud la hallaremos por dos procedimientos

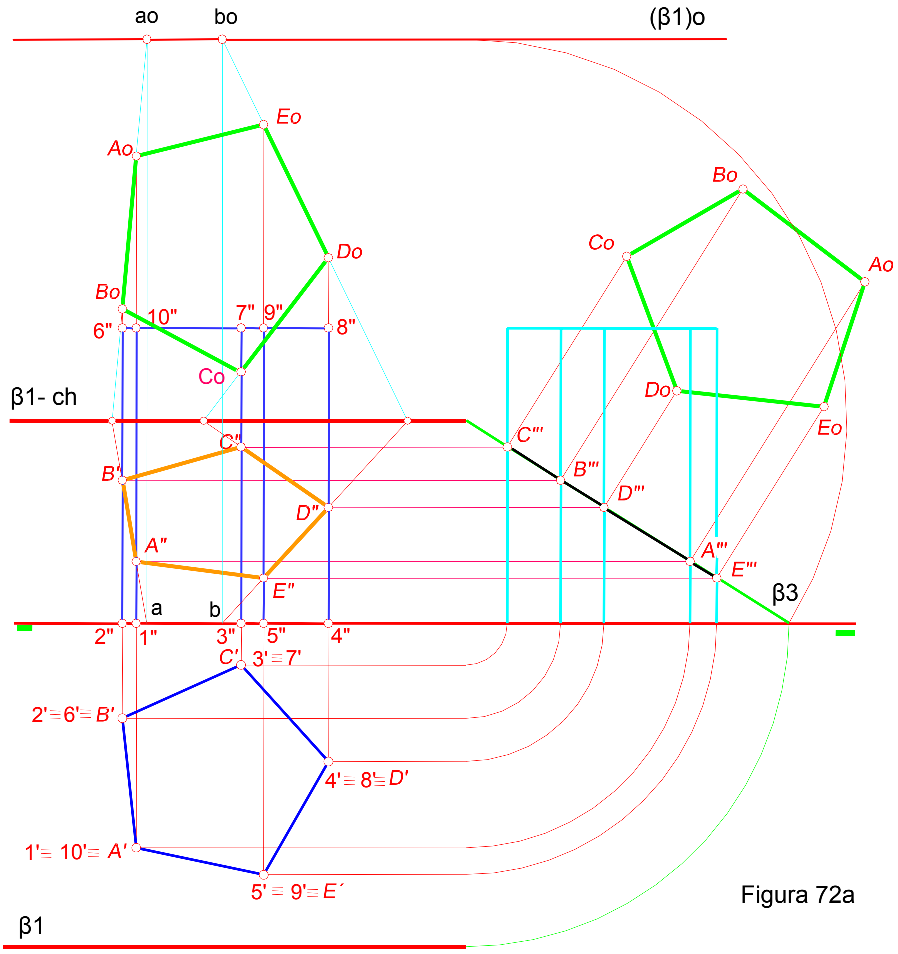


Figura 72a

12.4. Hallar la proyección horizontal y la vertical del prisma regular de base hexagonal apoyado en el plano oblicuo *α. Figura 73.*

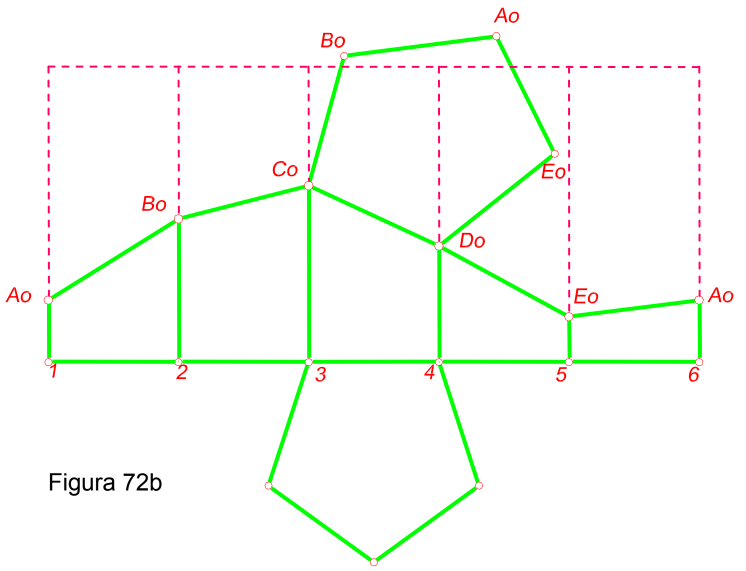


Figura 72b

1. En primer lugar colocamos la cara de apoyo en verdadera magnitud, utilizando la traza α_1 como charnela.

2. Hallamos las proyecciones horizontal y vertical, aplicando los procedimientos vistos; horizontales de plano, frontales, afinidad etc.

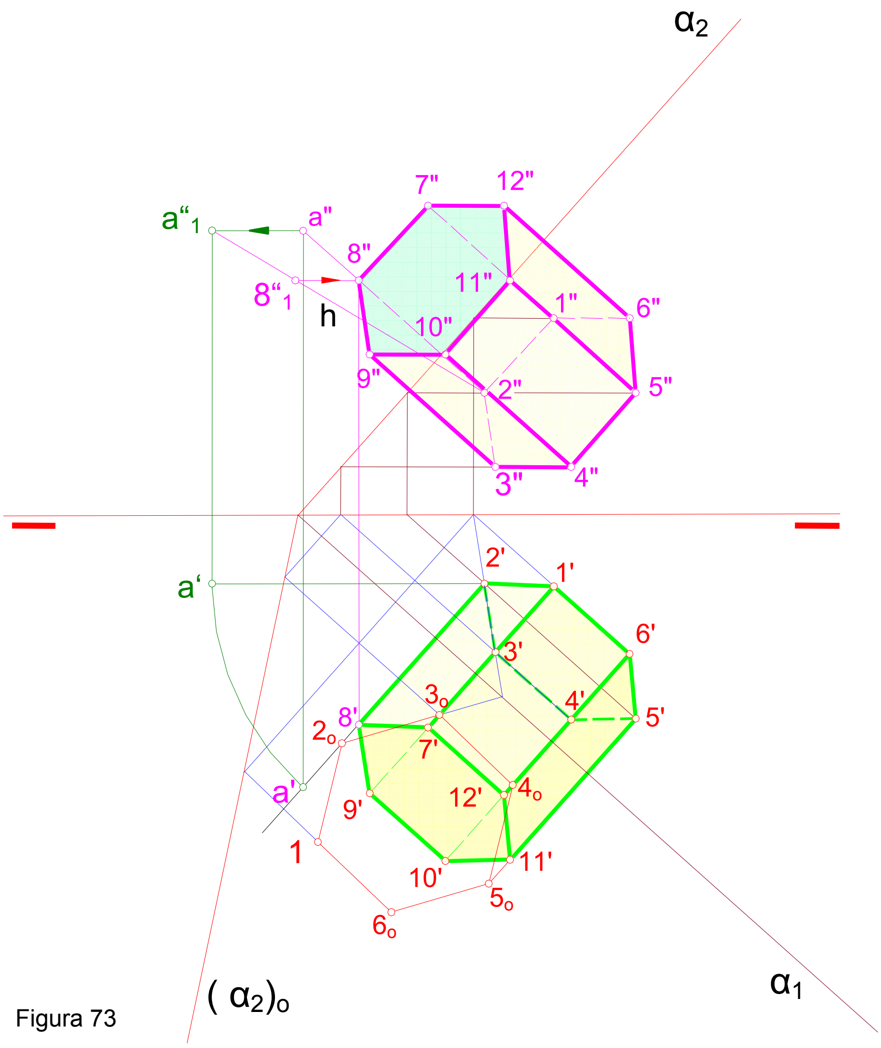


Figura 73

3. Por un punto cualquiera p.e. el ***2'*** trazamos una recta perpendicular a la traza del plano ***α_1***.

4. Elegimos un punto cualquiera del a recta anterior ***a'- a".*** y giramos el punto, a l aposición ***a'_1*** y ***a''_1***.

Sobre la recta ***2"- a''_1***, llevamos la altura del prisma. El resto del ejercicio es evidente.

13. CONO

13.1. Se da un cono equilátero recto de revolución apoyado por su base en el plano horizontal. Se pide:

a) La proyección Horizontal y vertical del cono.

b) Determinar en proyecciones y verdadera magnitud las secciones interceptadas por los planos *α y β*. Figura 74.

1.- Se divide la circunferencia en doce partes iguales para obtener las generatrices ficticias del cono.

2.- Hallamos su proyección vertical.

3.- La sección vertical vendrá determina por la recta ***AG***, y la horizontal por la proyección horizontal de los puntos correspondientes.

4.- Para hallar la proyección horizontal de los puntos ***JD***, se hace pasar por ellos un plano ***π*** $_2$ paralelo al horizontal y hallamos su proyección horizontal que será una circunferencia, esta nos determinan los puntos ***J'*** y ***D'.***

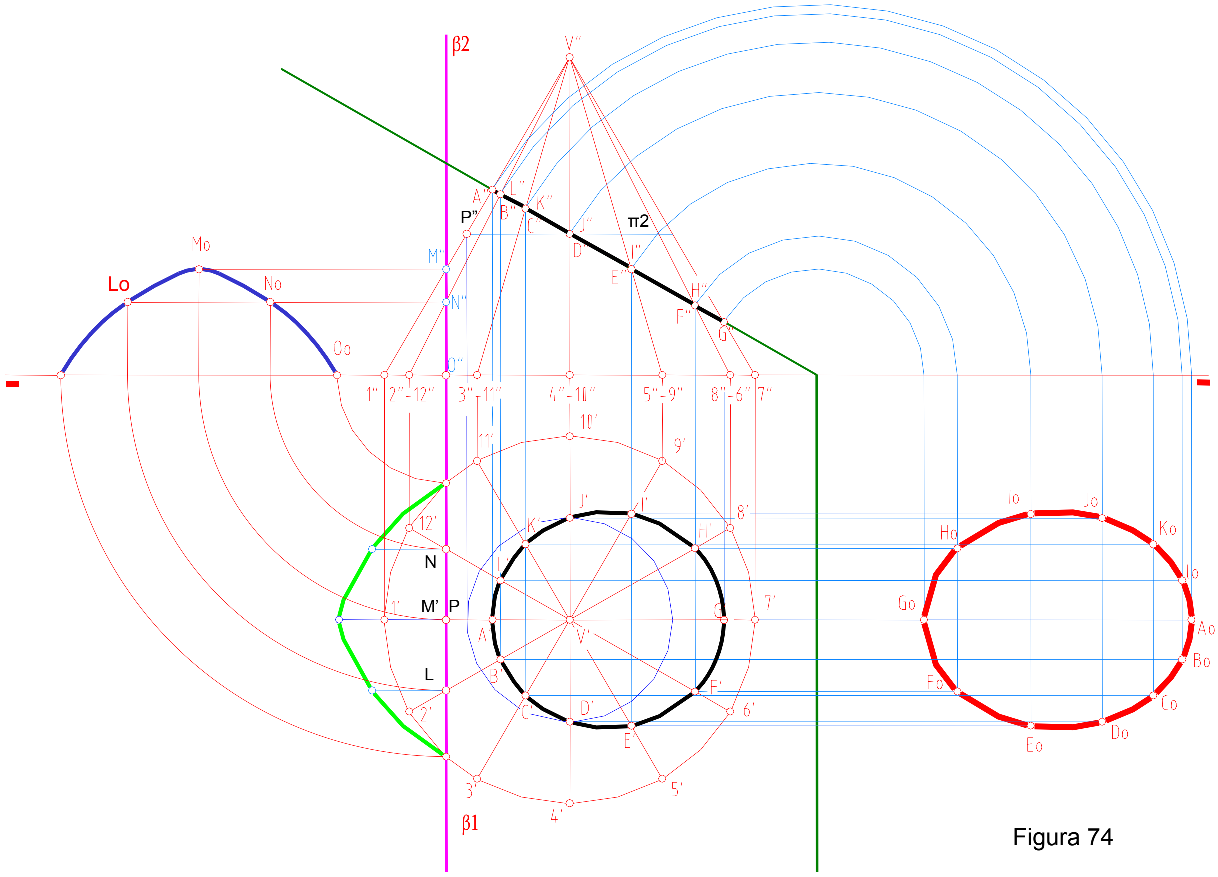


Figura 74

5.- Por último se halla la verdadera magnitud de la sección abatiendo el plano vertical ***α***$_2$.

6. La intersección del plano de perfil ***β (β*** $_1$ ***– β***$_2$***)*** viene dada por la intersección de las aristas ficticias con dicho plano. Puntos ***M'', N'', O''.***

7.- También puede resolverse trazando perpendiculares por ***M', N',L'*** a la traza horizontal del plano y llevando sobre las mismas el valor de las cotas de dichos puntos.

13.2. Dada una superficie cónica recta de revolución apoyada por su base en el plano horizontal de vértice *V'-V''*,. Se pide*:*

a) Representar la proyección horizontal y vertical.

a) Hallar las secciones en proyecciones y verdadera magnitud producidas por el plano *α* (*α* $_1$ – *α* $_2$) perpendicular al horizontal. Figura 75.

1.- Dividimos la base del cono en doce generatrices ficticias y hallamos la proyección vertical del mismo.

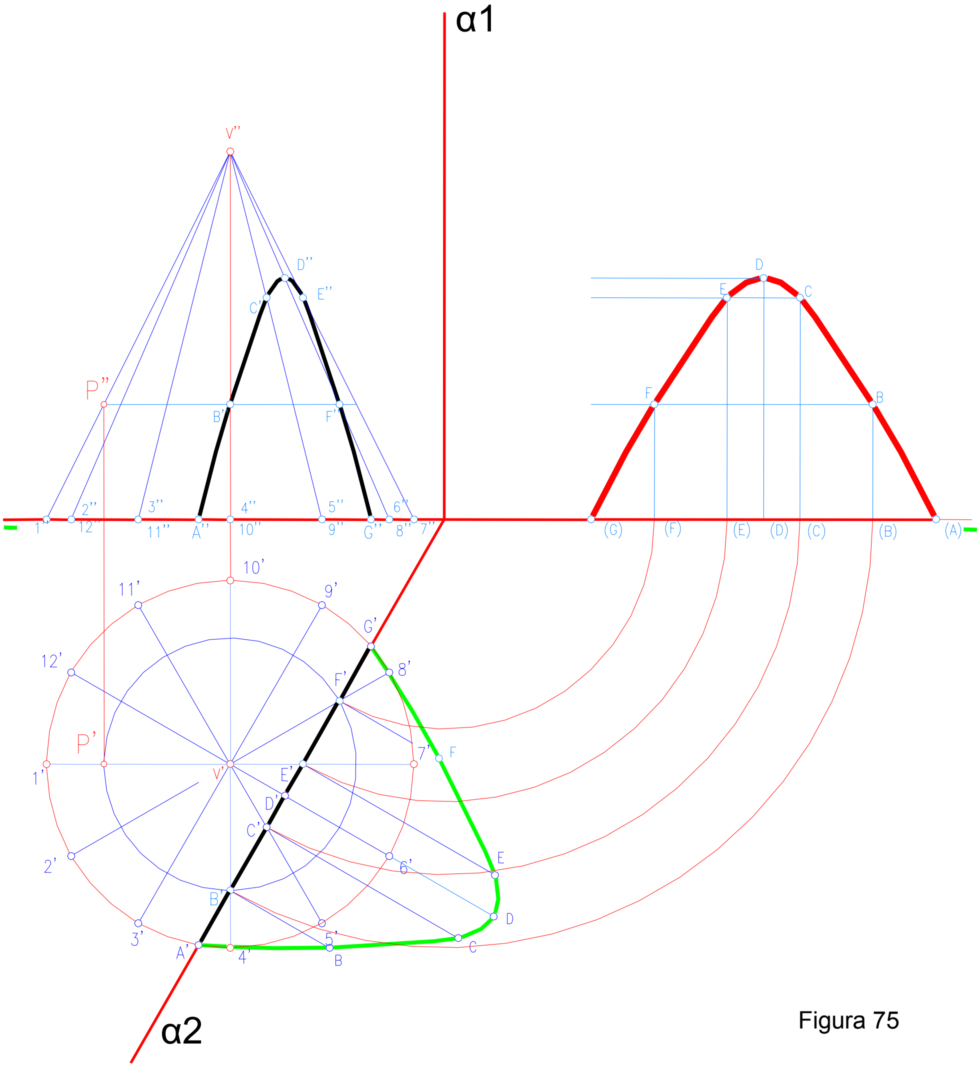


Figura 75

2. Para hallar el punto ***B'*** se traza una circunferencia con radio ***V' B'.*** Explicado en el ejercicio anterior*.*

3. La proyección horizontal vendrá dada por los puntos ***A', B', C', D' E', F', G'.*** ya de que se trata de un plano proyectante vertical y las aristas ficticias cortarán a la traza horizontal.

4. levantando perpendiculares a la línea de tierra se obtendrán los puntos. ***A'', B'', C'', D'', E'', F'', G''.*** que determinan la sección vertical.

5. La verdadera magnitud se halla levantando perpendiculares por los puntos ***A', B', C', D' E', F', G'.*** y llevando sobre ellas el valor de las cotas. También se puede hallar abatiendo el plano horizontal.

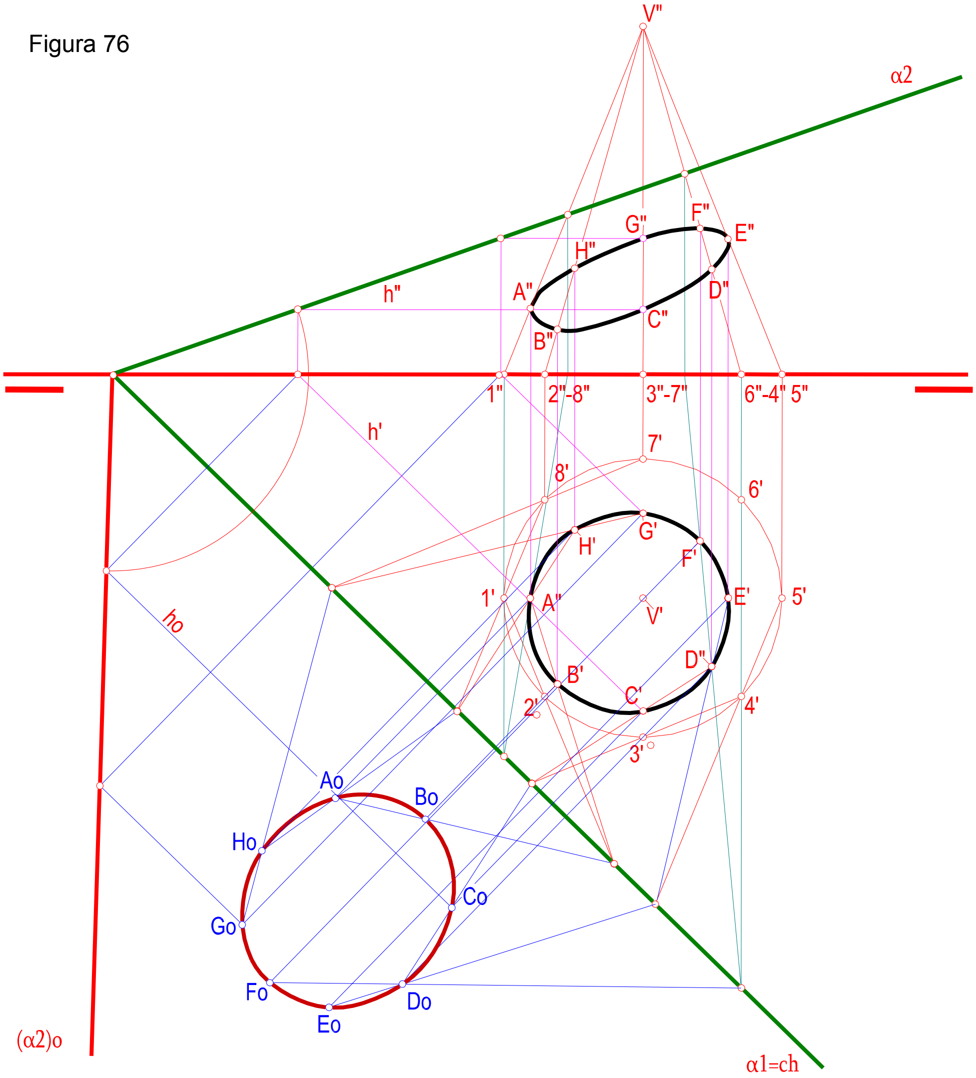
13.3. Dada una superficie cónica recta de revolución apoyada por su base en el plano horizontal de vértice *V'-V"*, *Se pide:*

a) Representar la proyección horizontal y vertical.

***b)* Hallar las secciones en proyecciones y verdadera magnitud producidas por el plano oblicuo *α*. Figura 76.**

1.- Se divide la circunferencia en un número de partes iguales, por ejemplo ocho. Seguidamente se halla la proyección vertical.

Figura 76



2. La intersección del plano con el cono se realizará por medio de intersección de aristas con el plano y por homología.

3. Para hallar la verdadera magnitud abatiremos el plano α_2. Se utilizará el procedimiento de homología y líneas horizontales de plano.

14. CILINDRO

14.1. Se da un cilindro recto de revolución apoyado en el plano horizontal de proyección, definido por sus proyecciones vertical y horizontal. Se pide:

a) Determinar en proyección la sección producida por el plano oblicuo *α*.

b) Posteriormente determinar en verdadera magnitud los ejes de la elipse sección.

c) Por último construir a partir de dichos ejes obtenidos anteriormente un Óvalo de cuatro centros. Figura 77.

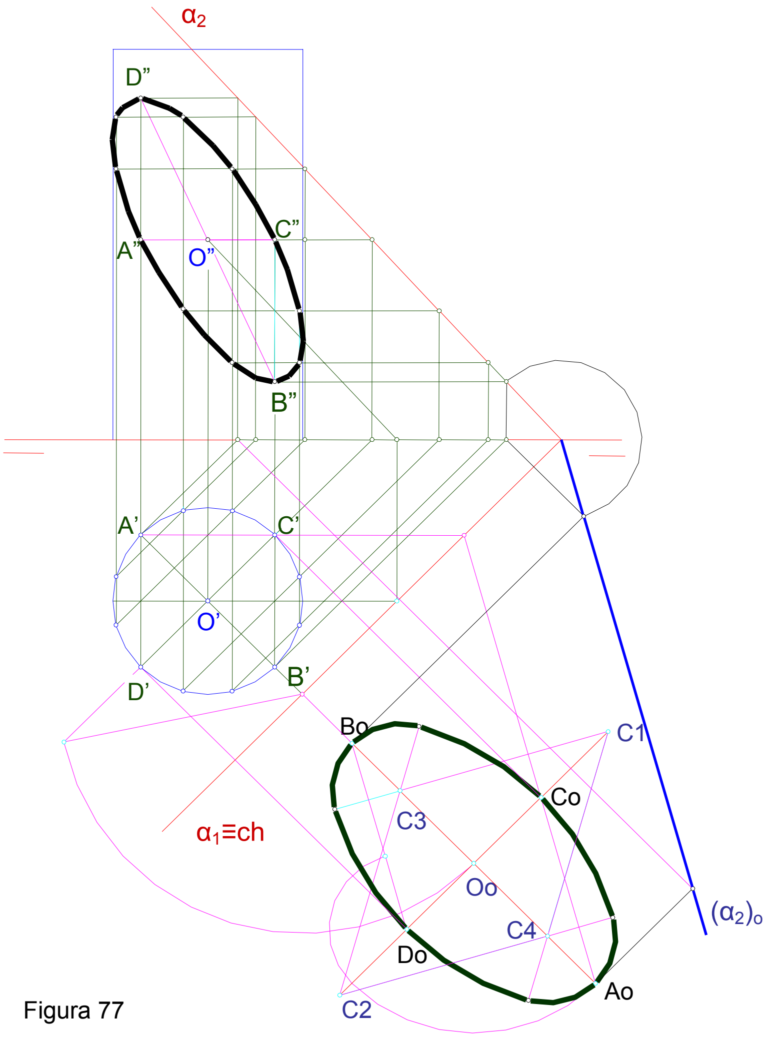


Figura 77

1. Se divide la circunferencia un número de partes iguales, en nuestro caso 12. Solo se identifican las que definen los ejes. ***A’, B’, C’, D’***,

2. Por medio de perpendiculares a la línea de tierra, hallamos las proyecciones segundas ***A”, B”, C”, D”***

3. Por abatimiento y homotecia hallamos los ejes en verdadera magnitud, puntos ***A_o, B_o, C_o, D_o.***

4. Por último construiremos la elipse de cuatro centros.

14.2. Se da un cilindro oblicuo apoyado en el plano horizontal definido por sus proyecciones horizontal y vertical.

a) Determinar en proyección y verdadera magnitud la sección producida por el plano *α*. Para resolver el problema se trabajará con 12 generatrices tomadas sobre la directriz del cilindro. Figura 78.

1. Dividimos la circunferencia en doce partes iguales, hallando unas generatrices que serán ficticias.

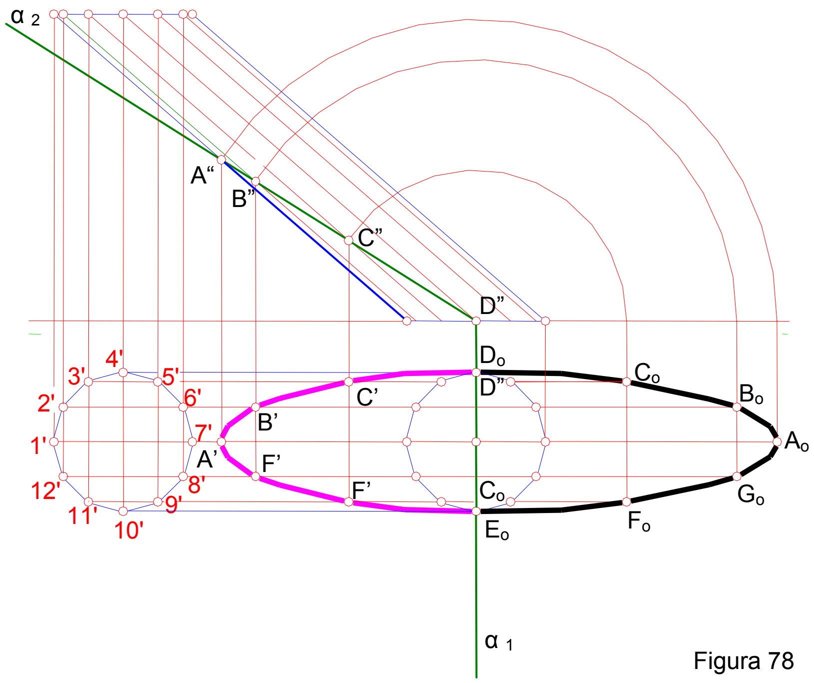


Figura 78

2. por tratarse de un plano proyectante, la traza α_2 cortara a las generatrices halladas. Puntos ***A”, B”, C”, D”.***

3. Por medio de perpendiculares a la línea de tierra obtenemos las proyecciones ***A’, B’, C’, D’*** y sus simétricos.

4. por abatimiento de la traza vertical α_2, obtendremos los puntos A_o, B_o, C_o, D_o. y su simétricos.

15. POLIEDROS

Se denomina poliedros a los cuerpos cuyas caras son polígonos regulares. Estos son cinco:

TETRAEDRO: Lo componen cuatro triángulos equiláteros. Tiene cuatro vértices. Figura 79.

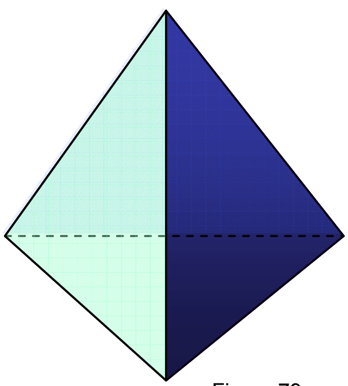


Figura 79

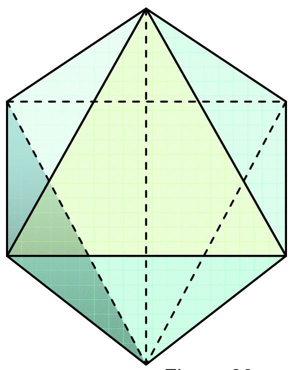


Figura 80

OCTAEDRO: Compuesto por ocho triángulos equiláteros y seis vértices. Figura 80.

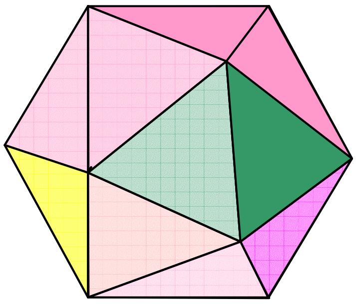


Figura 81

ICOSAEDRO. Poliedro compuesto por veinte triángulos equiláteros. Y doce vértices. Figura 81.

HEXAEDRO O CUBO: Sus caras son cuadradas. Tiene seis y ocho vértices. Figura 82.

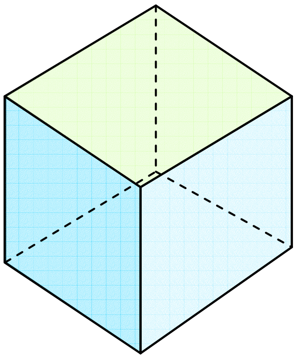


Figura 82

DODECAEDRO: En cada vértice concurren tres caras que son pentagonales. Tiene veinte vértices. Figura 83.

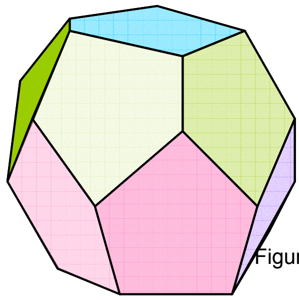


Figura 83

15.1. Tetraedro regular con una cara apoyada en el plano horizontal. figura 84a y b.

Tetraedro regular es el polígono regular convexo formado por cuatro caras que son triángulos equiláteros, tiene seis aristas y cuatro vértices.

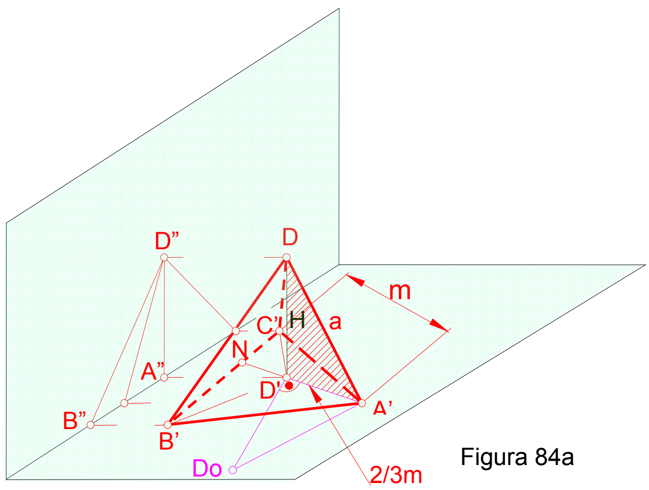


Figura 84a

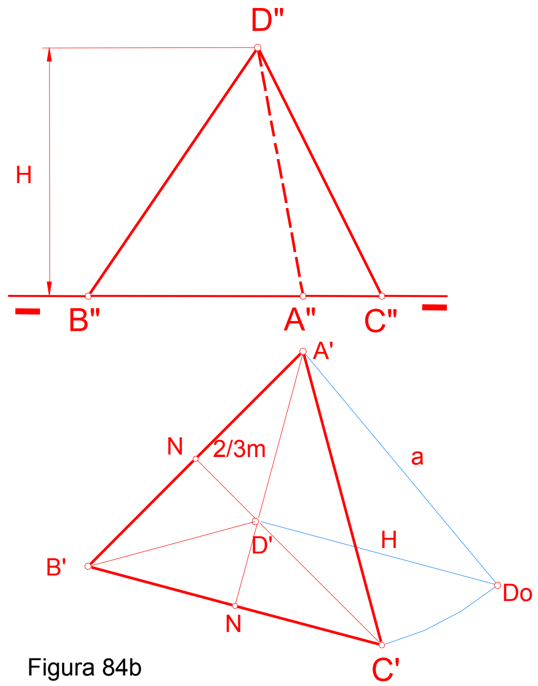


Figura 84b

La proyección horizontal será un triángulo equilátero, punto ***A’, B’, C’***. El lado del mismo será la arista del tetraedro. El vértice del mismo se encuentra en el centro geométrico del triángulo.

Para su resolución debemos calcular el valor de la altura ***H*** de mismo. Como puede apreciarse en la figura 84 a, esta será igual al lado de un triángulo rectángulo, cuyo cateto es ***2/3*** de la mediana del triángulo, y tiene como hipotenusa la arista del tetraedro ***a***.

Una vez hallad ala altura H, bastará con traza runa perpendicular a la línea de tierra que pase por D’ y llevar sobre ella el valor hallado, ya que estas e encuentra en verdadera magnitud por ser perpendicular al plano horizontal.

15.2. Tetraedro regular con dos aristas opuestas paralelas al plano horizontal. figura 85 a y b.

Las aristas ***A-B*** y ***C-D***, se proyectan en el plano horizontal en verdadera magnitud formando un cuadrado cuyos lados son las proyecciones de las aristas en el horizontal y sus diagonales las aristas en verdadera magnitud.

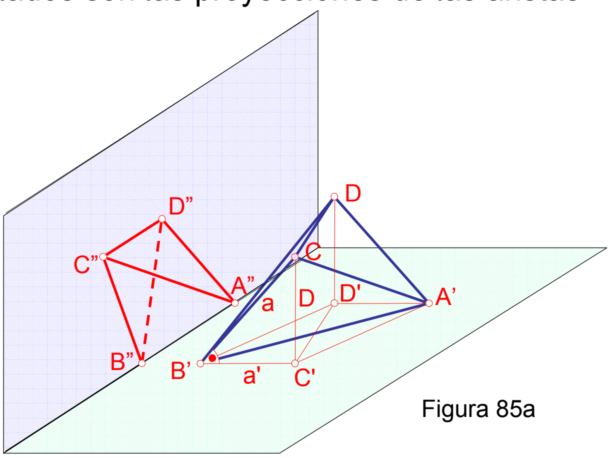


Figura 85a

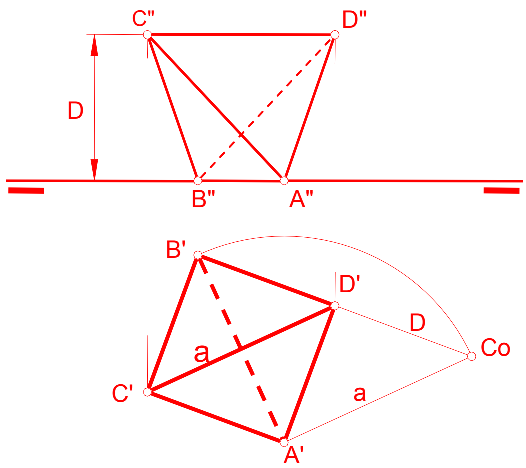


Figura 85b

La distancia ***D*** entre las aristas que ***CD*** y ***C’D’***, figura 85 a, vendrá dada por el lado ***D*** de un triángulo rectángulo, de cateto la proyección del a arista ***a’*** y de hipotenusa el valor de la arista ***a***. Figura 85 b.

15.3. Tetraedro regular con un vértice apoyado en plano horizontal. Figura 86 a y b.

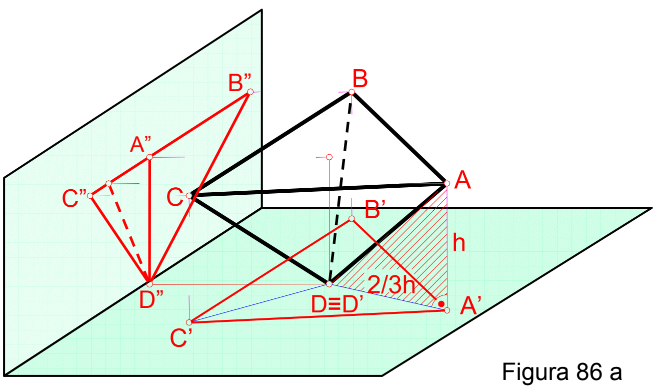


Figura 86 a

La proyección horizontal del tetraedro apoyado con un vértice ***D*** en el plano horizontal, será un triángulo equilátero, cuyo lado será igual a la arista del mismo.

El ejercicio quedará resuelto cuando conozcamos la altura del mismo. Dicha altura se calculará de forma similar a la del tetraedro apoyado con una cara en el plano horizontal.

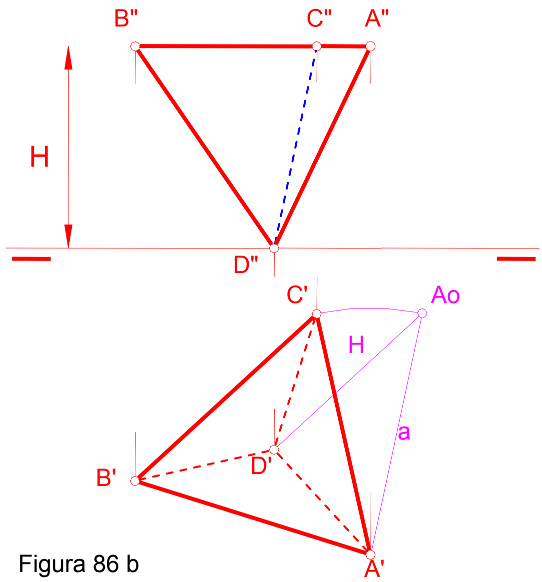


Figura 86 b

15.4. Dada la proyección horizontal de un tetraedro, dibujarlo teniendo en cuenta que se encuentra apoyado en el plano oblicuo *α*. Figura 87

1.- Hallaremos la verdadera magnitud de la base. Para ello abatimos el triángulo ***A’, B’, C’***, utilizando como charnela la traza vertical del plano, α_2.

2- Un vez que tenemos el triángulo equilátero correspondiente a las caras del tetraedro, hallamos la altura del mismo.

Procedimiento visto anteriormente.

3.- Seguidamente hallamos las proyecciones, horizontal y vertical del ortocentro ***G***.

4.- El siguiente paso, consistirá en hallar la proyección vertical del triángulo ***A’, B’, C’***.

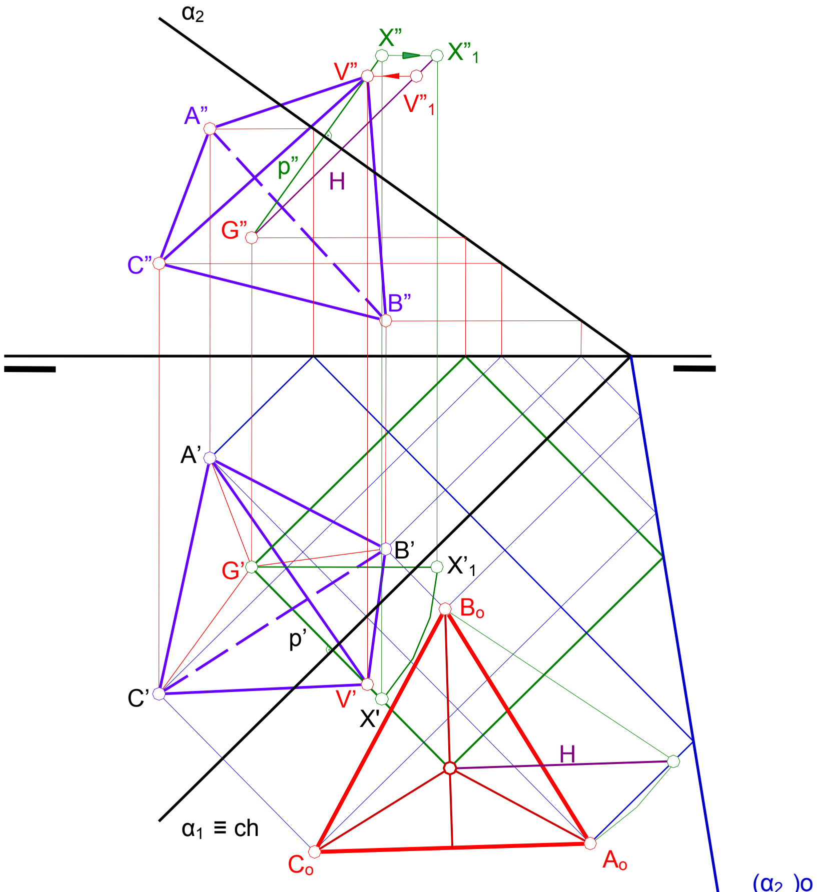


Figura 87

5.- Como el tetraedro se encuentra apoyado en el plano *α* , la altura del mismo será una recta perpendicular a la traza del plano. Una vez trazada la altura, elegimos un punto cualquiera ***X’*** de la recta ***p’***.

6.- Obtenemos la verdadera magnitud del segmento ***G’- X’***, realizando un giro de la misma. Punto ***X”$_1$-X’$_1$***

7.- Sobre la recta ***G”- X”$_1$***, llevamos la altura ***H*** del tetraedro, que por medio de una paralela a la línea de tierra, obtenemos ***V” y V’***

8. la unión del vértice con los puntos ***A, B***, y ***C***, nos determinan el tetraedro.

15.4.1. Representar el tetraedro regular de base 1’, 2’, 3’, apoyado en el plano horizontal. Seguidamente determinar :

a) **Sus proyecciones y verdadera magnitud de la sección interceptada por el plano oblicuo α.**

b) **Hallar el desarrollo del mismo**. Figura 88.

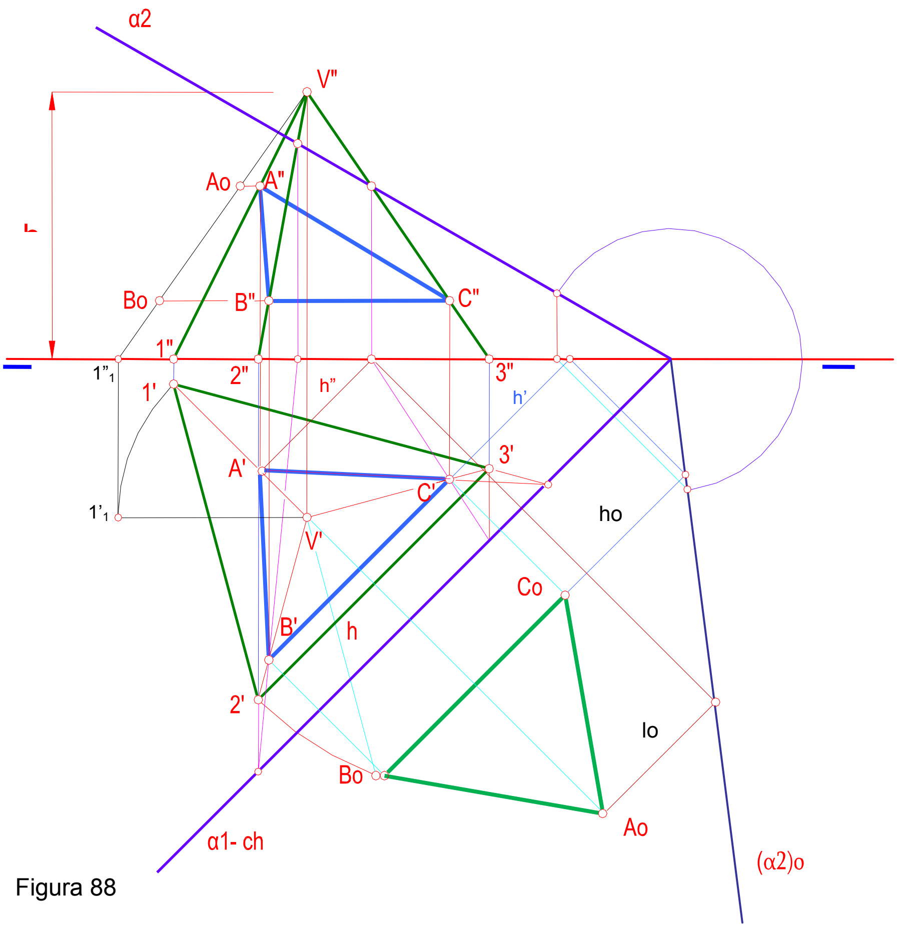


Figura 88

1. Hallar el vértice ***V***, y las aristas de las caras.

2. Hallar la altura del tetraedro. Lado de un triángulo rectángulo de hipotenusa la arista y lado menor ***2/3*** de la mediana.

2, Para hallar la proyección horizontal de la sección Utilizaremos el procedimiento de intersección de aristas y homotecia.

3. Por los puntos ***A’, B’, C’*** se levantan perpendiculares a la línea de tierra hasta que corte a las aristas en los puntos ***A”, B”, C”.***

4. Para hallar la verdadera magnitud abatimos el plano vertical.

5.- Seguidamente abatimos las horizontales de plano ***h’*** y ***l’*** que nos determinan ***ho*** y ***lo***.

6.- Para hallar la verdadera magnitud de la sección tendremos que girar una de las aristas del tetraedro, por ejemplo la ***V’ 1’.*** La verdadera magnitud de la arista vendrá dada por el segmento ***1”1 V”.*** Tazando paralelas a la línea de tierra por los punto ***A”*** y ***B”*** tendremos ***Ao, Bo*** y ***Co.***

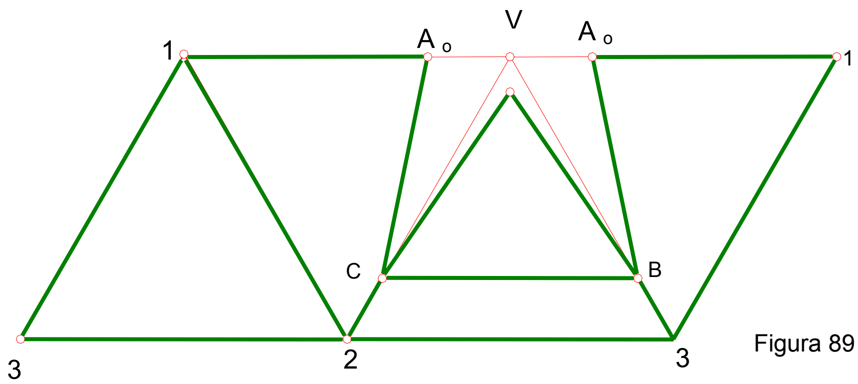


Figura 89

7.- Para dibujar el desarrollo, trazaremos las caras laterales del tetraedro, que son cuatro triángulos equiláteros. Figura 89.

15.5. HEXAEDRO O CUBO.

Poliedro formado por seis caras que son cuadrados, tiene doce aristas y ocho vértices, sus ángulos son rectos formando un triedro trirrectángulo.

Los elementos que lo definen son: La arista ***a***, la diagonal de la cara ***dc*** y la diagonal del cubo ***d***.

Como puede observarse, Figura 90, la diagonal de la cara es la hipotenusa de un triángulo rectángulo cuyos lados son las aristas del mismo.

La diagonal del cubo ***dc*** es hipotenusa de un triángulo rectángulo que tiene como catetos la diagonal de la cara ***dc*** y la arista ***a***. Figura 91.

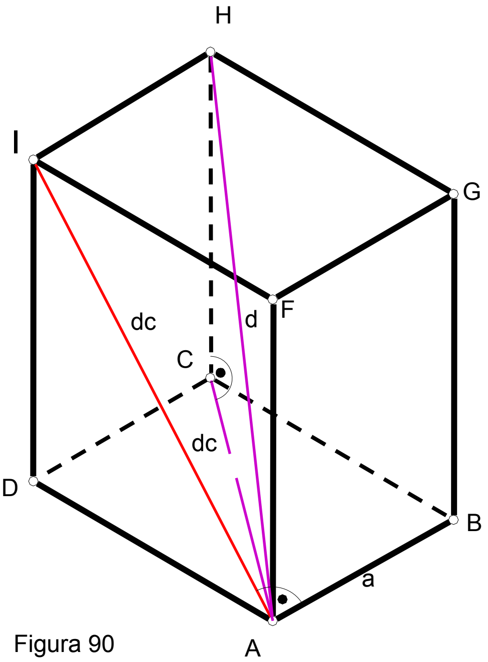


Figura 90

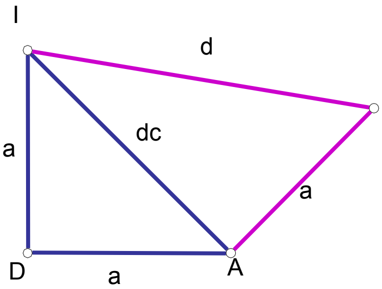


Figura 91

Si dividimos la diagonal del cubo en tres partes iguales, puntos ***P, Q,*** figura 92, y trazamos planos perpendiculares a dicha diagonal que pasen por los referidos puntos, estos interceptarán a las caras formando triángulos equiláteros iguales ***BDF*** y ***CGI***.

La altura ***r*** (Figura 94), del triángulo ***AJI***, es el radio de la circunferencia circunscrita al triángulo equilátero de lado la diagonal de la cara, ***dc***. El pie de esta perpendicular ***K*** divide a la hipotenusa ***IJ*** en ***2/3d*** y ***1/3 d***. propiedad que utilizaremos para resolver el problema que veremos a continuación.

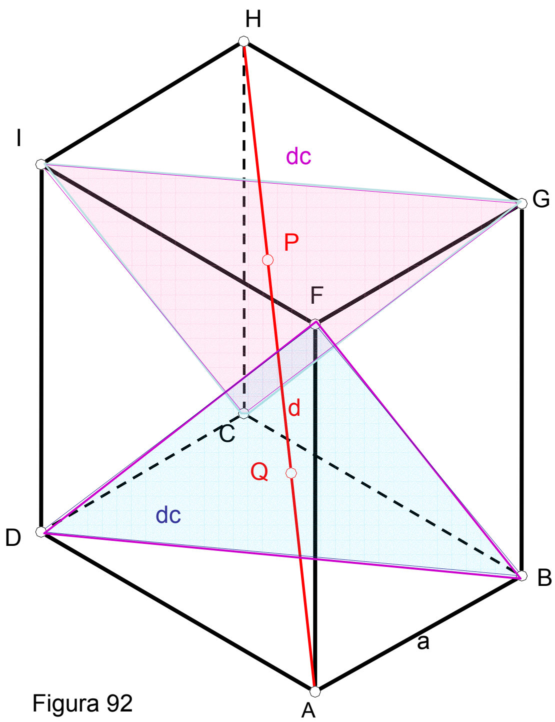


Figura 92

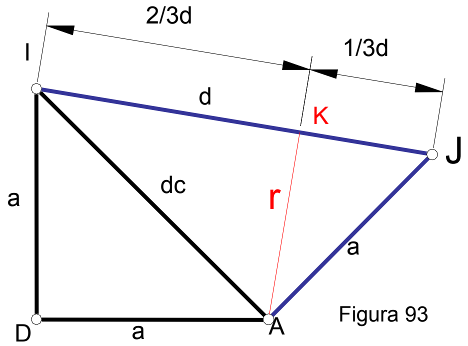


Figura 93

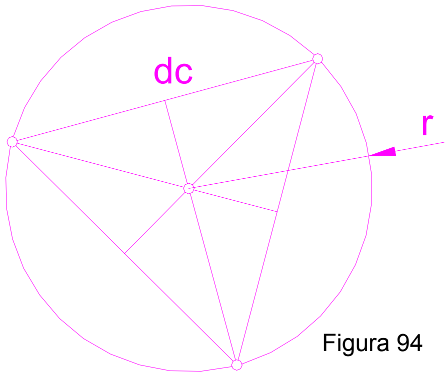


Figura 94

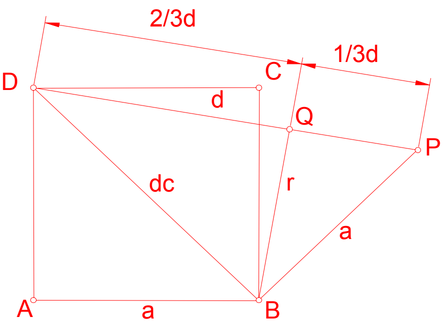


Figura 95

15.5.1. Hexaedro con una diagonal perpendicular al horizontal. Figura 96.

De acuerdo con lo expuesto anteriormente tendremos que hallar el radio ***r*** de la circunferencia circunscrita al triángulo equilátero de lado la diagonal de la cara ***dc***. Figura 95.

Haciendo centro en ***A***', punto cualquiera, de la diagonal, se trazan los triángulos ***B', E', D'*** y ***C', F',H',*** obteniendo la proyección horizontal.

Llevamos a una recta perpendicular a la línea de tierra por ***A'*** el valor de la diagonal hallada ***d*** y la dividimos en tres partes, haciendo pasar por las divisiones dos planos ***δ₂ -φ₂*** paralelos al horizontal.

Seguidamente proyectamos los vértices del cubo en proyección horizontal hasta que se corten con las trazas de los planos ***δ₂ y φ₂*** obteniendo sus proyecciones verticales.

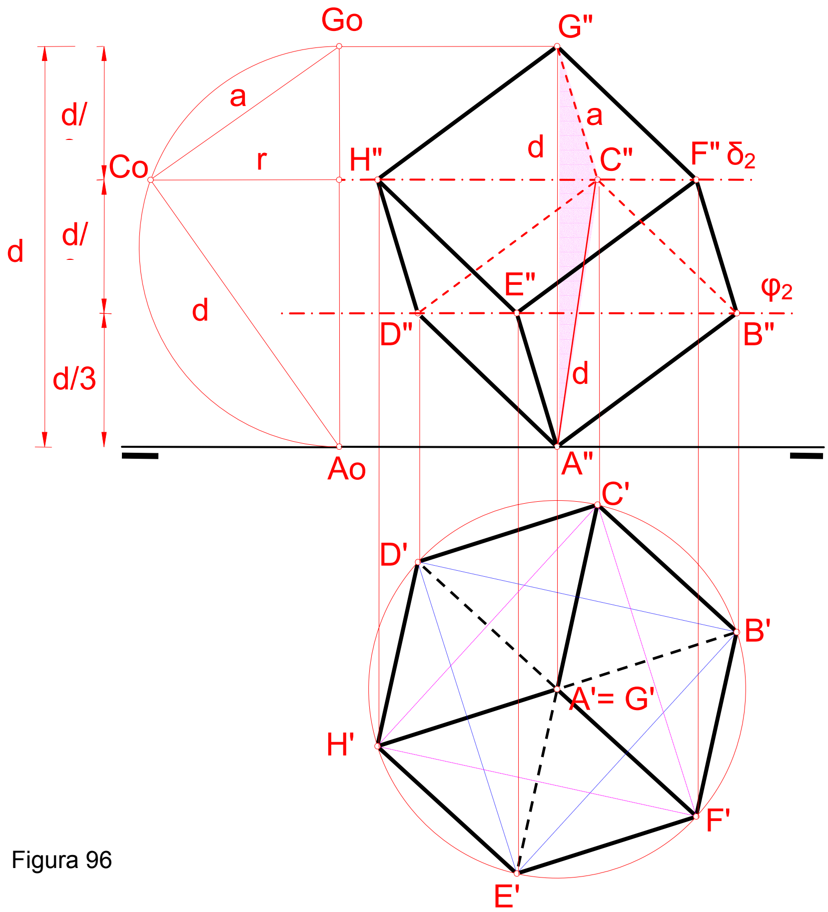


Figura 96

Se puede observar que el radio ***r*** puede hallarse abatiendo el triángulo rectángulo ***A", C",G".***

15.5.2. En la figura dada se define un hexaedro mediante su proyección horizontal. Sabiendo que dicho poliedro se encuentra apoyado en el plano de proyección horizontal, determinar:

a) Su proyección vertical.

b) Obtener posteriormente en proyección y verdadera magnitud la sección producida por el plano *α*. Figura 97.

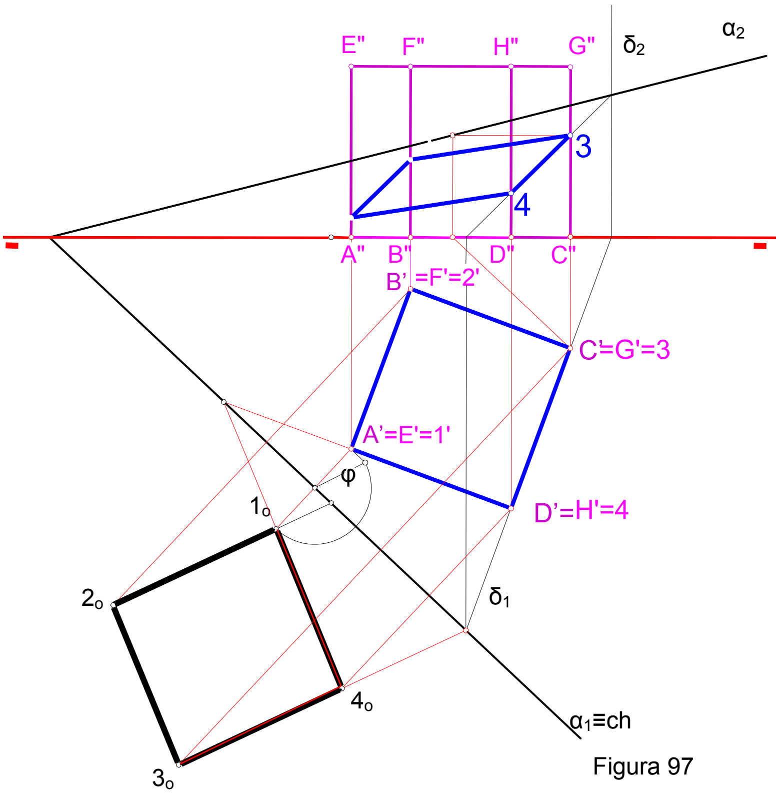


Figura 97

Como puede observarse la proyección horizontal de la sección ***1', 2', 3' 4',*** se confunde con la base del cubo. La proyección vertical se obtendrá por medio de rectas horizontales o frontales, punto ***3'-3".*** También se puede resolver haciendo contener a las aristas en un plano auxiliar.

Para obtener la verdadera magnitud operaremos abatiendo el vértice ***1*** por el procedimiento general, y operando para los restantes puntos por afinidad.